

П. П. ЛАЗАРЕВ

ОБ ОБЩИХ ПРИНЦИПАХ ГЕОФИЗИЧЕСКОЙ КАРТОГРАФИИ

В работе установлена связь точности геофизических измерений и масштаба карт, на которые наносятся положения точек, где проделаны измерения. Указана связь предельной густоты сети наблюдений с масштабом карты. Дан метод контроля правильности расположения на карте изолиний X и Y . Найдены условия ортогональности изолиний X и Y .

§ 1. Всякое геофизическое исследование приводит прежде всего к измерению в определенной точке A поверхности Земли некоторой физической величины N . После определения при помощи астрономических или геодезических приемов координат точки A , она наносится на соответствующую карту. Заполнив карту рядом заснятых точек, где произведены измерения, проводят на карте через точки, имеющие одинаковое значение N , непрерывную линию, так называемую изолинию. Система изолиний с различным значением N составляет поле изолиний, пользуясь которым, можно решить ряд дальнейших геофизических задач, связанных с практическими потребностями геофизики и геологии.

Задача настоящей работы состоит в выяснении общих принципов геофизических измерений, нанесения на карту точек, где сделаны измерения, и составления и проверки карты изолиний.

§ 2. При разрешении геофизических задач заданными являются или картографическая основа или метод измерения величины N .

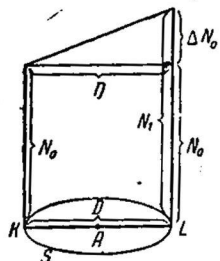
Прежде всего покажем, что между масштабом M карты, на которую наносятся наблюдения, и точностью измерений величины N имеется определенная связь.* Мы будем исходить в наших рассуждениях из того очевидного обстоятельства, что через каждую точку, нанесенную на карту, мы должны провести только одну определенную изолинию.

Пусть мы желаем нанести на карту положение точки A , координаты которой нам известны. Как бы ни были тонки чертежные инструменты, при помощи которых мы наносим точку на карту, у нас всегда вместо геометрической точки получится более или менее обширная площадь, покрытая тушью. Мы будем считать, что точка изобразится на карте кружком σ с диаметром δ . Кружку σ соответствует на горизонтальной поверхности Земли круг S с диаметром D , величина которого зависит от масштаба карты M . Чтобы кружку σ соответствовало только одно значение N , нужно, чтобы изменения N внутри круга S не могли быть открыты при измерениях, производимых внутри S . Для этого необходимо, чтобы значения N , наблюдаемые в разных точках круга S , отличались друг от друга на величины, заключающиеся в пределах возможных погрешностей измерения, так что все N , измеренные внутри круга S , практически являлись бы одинаковыми. Наибольшая точность метода

* Основания рациональной геофизической съемки были впервые указаны мною в статьях [1, 2, 3].

должна быть таким образом такова, что максимальные разности N в пределах S должны равняться ошибке метода.

В пределах круга S величина N изменяется непрерывно. Если начертить на плоскости круг S диаметра D и восстановить в каждой точке круга перпендикуляр, длина которого в некоторых единицах равна измеренной в этой же точке величине N , то концы перпендикуляров уложатся на некоторой поверхности, которая при небольшом D и малых изменениях N близка к плоскости Q .



Фиг. 1

Проведем в круге S диаметр KL (фиг. 1) перпендикулярно к линии пересечения Q и горизонтальной плоскости xy , на которой начерчен круг S . Вдоль диаметра KL падение N является наибольшим, и следовательно, разность $N_1 - N_0 = \Delta N_0$ максимальна.

Если выбрать для измерения N такой метод, что его ошибка f равна ΔN_0 , то все полученные в разных точках круга S значения N практически равны, так как разности N между собой все лежат в пределах возможных погрешностей наблюдений. Если отнести ΔN_0 к значению N_0 , мы получаем относительную ошибку, равную

$$F = \frac{\Delta N_0}{N_0}.$$

Градиент измеряемой величины N вдоль диаметра KL равен $\frac{\Delta N_0}{D}$. Деля его на N_0 , находим относительный градиент

$$G = \frac{\Delta N_0}{DN_0}.$$

Деля и умножая полученное значение G на δ , находим

$$G = \frac{\Delta N_0}{N_0} \cdot \frac{\delta}{D} \cdot \frac{1}{\delta}. \quad (1)$$

Величина $\frac{\Delta N_0}{N_0}$ есть, как мы видели, относительная минимальная при данной карте погрешность F , получаемая при измерении величины N ; $\frac{\delta}{D}$ есть масштаб M карты.

Таким образом получаем

$$G = FM \cdot \frac{1}{\delta}$$

или

$$F = \frac{\delta G}{M}. \quad (2)$$

Формула (2) дает верхний предел точности метода, при котором для каждой точки карты определенного масштаба получается только одно значение N .

Ошибку F мы назовем рациональной ошибкой метода. Из формулы (2) видно, что предельная минимальная ошибка метода при данном градиенте G растет с уменьшением масштаба, уменьшается с точностью нанесения точки на карту (с уменьшением δ). С увеличением градиента G при прочих равных условиях предельная минимальная ошибка метода F растет. Таким образом, при применении одной и той же карты мы можем при более значительном градиенте пользоваться менее точным методом геофизической съемки, чем при меньшем градиенте.

Зная из рекогносцировочных данных значение градиента, можно при заданном масштабе карты найти рациональную ошибку метода. Если задана ошибка метода, можно найти подходящий масштаб карты.

§ 3. Чтобы привести наглядный пример практического значения формулы (2), мы возьмем хорошо изученную Курскую магнитную аномалию. Относительный градиент вертикальной составляющей Z в пределах аномального поля очень велик и в среднем в области Шигров равен 0,5 (D выражается в км). Метод исследования, принятый в руководимой мной академической комиссии, допускал точность в 1%, и следовательно $F=10^{-2}$. Если считать, что $\delta=1 \text{ мм}=10^{-6} \text{ км}$, то масштаб карты M будет равен [4]:

$$M = \frac{G\delta}{F} = \frac{1}{20\,000}.$$

Масштаб карты, удовлетворяющий указанным условиям съемки в Курской области, должен был быть таким образом равен 1:20 000.

При работах в области Курской аномалии в частях, где наблюдалась значительная аномалия, как раз и были специально составлены карты масштаба 1:20 000. Так как градиент не везде одинаков, то масштаб менялся, и менее важные области с меньшим градиентом имели масштаб карт 1:40 000.

Во всяком случае при грубой магнитной съемке приходилось, благодаря большому градиенту Z , обращать особое внимание на составление карт большого масштаба. Получение подобных карт потребовало специальных триангуляционных работ, которые были блестяще произведены прикомандированными к Комиссии Курской аномалии геодезистами корпуса военных топографов. Имевшиеся в продаже карты ($M=1:126\,000$) даже при той малой точности метода (1%), который в силу сложившихся обстоятельств являлся единственно возможным при начале работ в 1919 г., были совершенно не пригодны для работ комиссии.

При своих исследованиях, законченных в 1918 г. и затем утерянных для науки, Э. Е. Лейст пользовался для определения Z в Курской аномалии классическим методом Гаусса, позволявшим измерять величину Z с точностью до 0,1%. Ошибка метода, примененного Лейстом, была таким образом в 10 раз меньше, чем ошибка метода академической комиссии, и следовательно его карты должны были бы иметь масштаб в 10 раз больший, т. е. 1:2000.

Между тем Лейст пользовался имевшимися в продаже картами с $M=\frac{1}{126\,000}$, и следовательно его карты были в 63 раза менее точны, чем это соответствовало его магнитным измерениям. Уже в самом начале работ академической комиссии в 1919 г. мною было указано, что при наличии карт масштаба 1:126 000 Лейст мог бы без всякого ущерба для точности изображения аномалии пользоваться методом, дающим ошибку в 6%.

Несоответствие между масштабом карты и методом магнитных измерений было отмечено и за границей. Я приведу мнение известного германского магнитолога Бартельса, который в 1929 г. писал:

„Als abschreckendes Beispiel für unnötige Genauigkeit seien nicht veröffentlichte* Messungen von E. Leyst bei Kursk genannt, der an jeder Station mit peinlicher Sorgfalt absolute Messungen (auf einige γ genau) anstellte, während man die Hauptzüge der riesigen Störung schon mit den rohesten Instrumenten hätte feststellen können. In der Tat sind bei der neuen Aufnahme der Kursker Anomalie mit gutem Erfolg Instrumente verwendet, deren Fehler mehrere hundert γ betragen“ [5].

* Указания Бартельса, что исследования Э. Е. Лейста не были опубликованы, требует некоторого разъяснения. В 1921 г. Академией Наук (Материалы по исследованию Курской магнитной аномалии, издаваемые под редакцией акад. П. П. Лазарева) была опубликована монография Э. Е. Лейста „Курская магнитная аномалия“. В этой книге, правда, не приведено ни карт, ни таблиц, дающих картину аномалии, и не дано никаких координат мест, через которые проходит аномалия. Зато методика исследования изложена со значительной полнотой и приведены максимальные и минимальные значения геомагнитных элементов, однако без указания, в каких местах эти значения были наблюдаемы.

Мы приходим таким образом к заключению, что менее точный метод магнитных измерений, указанный А. Н. Крыловым, в соединении с картами большого масштаба дал более точное описание Курской аномалии, чем съемка Лейста, сделанная точнейшими магнитометрическими методами при наличии карт с малым масштабом.

На соотношение между картографической основой и геофизическими измерениями приходится обращать особое внимание в настоящее время у нас в Союзе, когда Партия и Правительство ставят грандиозные задачи геодезического и геофизического характера и когда каждый процент излишней точности наблюдений должен отозваться на стоимости работ и при большом их объеме может иметь существенное практическое значение.

§ 4. Когда выбран масштаб карты и связанная с ним точность измерения исследуемой величины N , необходимо поставить вопрос о густоте сети точек при съемке, иначе говоря, вопрос о расстоянии одной заснятой точки от соседних. Эта проблема также имеет не только научное, но и практическое значение, так как ее решение связано со стоимостью данной геофизической съемки.

Чтобы решить вопрос о густоте съемки, поставим прежде всего вопрос о предельной густоте сети точек, допуская, что точки находятся в центрах равных квадратов (фиг. 2), заполняющих всю исследуемую плоскую поверхность Земли. Пусть сторона квадрата равна диаметру D круга, соответствующего на поверхности Земли диаметру кружка δ , изображающего на карте точку A , где сделано измерение N . Предельная возможная густота сети точек будет достигнута тогда, когда в центре каждого из квадратов будут произведены измерения N . В этом

случае карта покроется рядом черных кружков (с диаметром δ), изображающих заснятые точки, причем кружки будут соприкасаться друг с другом. В увеличенном виде мы получим на карте картину, изображенную на фиг. 3.

Если мы назовем густотой n съемки число точек на одном км², то измеряя D в км, имеем для предельной возможной густоты n_0 сети точек при съемке соотношение

$$n_0 = \frac{1}{D^2}.$$

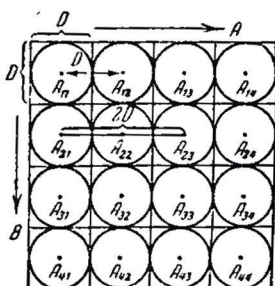
На карте, где черные кружки (диаметра δ) соприкасаются друг с другом, дальнейшая обработка результатов измерения очень затруднена, и поэтому предельная возможная густота сети n_0 является высшим возможным пределом детальности съемки.

На практике выгодно, чтобы точки, изображаемые на карте черными кружками с диаметром δ (равным около 1 мм), отстояли друг от друга на 10 мм, так что густота сети, которую мы в этом случае назовем рациональной густотой и которая равна n_1 , выражается так:

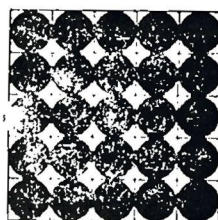
$$n_1 = \frac{1}{10^2 D^2}. \quad (3)$$

§ 5. Пусть, как это было в Курской аномалии, $F=0,01$; $M=\frac{1}{20\,000}$ и $D=20$ м. Если n_1 отнесено к квадратному километру, то

$$n_1 = \frac{1}{2^2 \cdot 10^2 \cdot 10^{-4}} = 25.$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Таким образом в исследуемом случае рациональная густота съемки n_1 такова, что на 1 км приходится 25 заснятых точек.

Примем ширину Курской аномалии в 4 км и длину около 200 км. Площадь, занятая аномалией, равна таким образом $P=800 \text{ км}^2$. Общее число заснятых точек на всей аномалии должно быть

$$Pn_1 = 20\,000.$$

Приблизительно это число точек для Курской аномалии и было получено в работах Комиссии Академии Наук и Комиссии ВСНХ (около 19000). Таким образом детальность съемки в области Курской аномалии соответствовала рациональной густоте при данном масштабе и данной точности метода съемки. Это число значительно отличается от числа 4500 точек, заснятых Лейстом. Детальность съемки у Лейста в 4,4 раза меньше, чем в работе Комиссии Курской аномалии, хотя метод его и мог бы позволить при подходящих картах большего масштаба получить детальность съемки значительно большую, чем получила Комиссия. Для этого потребовалось бы соответственно большее количество точек.

§ 6. Мы видели, что относительный градиент G равен $\frac{\Delta N_0}{N_0} \cdot \frac{1}{D}$. Находя отсюда D и имея в виду, что $\frac{\Delta N_0}{N_0} = F$, получаем

$$D = \frac{F}{G}.$$

Подставив это значение D в формулу (3), дающую рациональную густоту n_1 съемки, находим

$$n_1 = \frac{G^2}{10^2 F^2}. \quad (4)$$

Эта формула дает густоту n_1 в функции относительного градиента G и рациональной ошибки F . Подставляя из данных о Курской аномалии значения $G=0,5$ и $F=0,01$, мы опять находим, как это понятно, то же значение

$$n_1 = 25.$$

Наконец, в выражение n_1 мы можем ввести масштаб карты M . Умножая и деля $n_1 = \frac{1}{10^2 D^2}$ на δ^2 , имеем

$$n_1 = \frac{\delta^2}{D^2} \cdot \frac{1}{(10\delta)^2}.$$

Но $\frac{\delta}{D} = M$ и 10δ есть расстояние на карте точек друг от друга, равное d (d измеряется в км),

$$n_1 = \frac{M^2}{d^2}. \quad (5)$$

Так как $\delta = 10^{-6}$ км, то $d = 10^{-5}$ км, и следовательно $d^2 = 10^{-10}$,

$$M = \frac{1}{20\,000};$$

отсюда

$$n_1 = \frac{1}{4 \cdot 10^8 \cdot 10^{-10}} = 25.$$

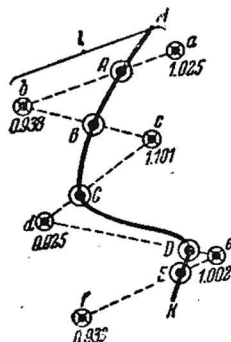
Мы находим, как это и должно быть, ту же рациональную густоту, какую мы получили раньше. Если бы масштаб карты увеличился в a раз, M превратилось бы в aM , и формула (5) перешла бы в

$$n_1 = \frac{a^2 M^2}{d^2}. \quad (5)$$

При увеличении масштаба в a раз рациональная густота должна быть увеличена в a^2 раз.

§ 7. Когда на карте намечено положение достаточного числа точек, необходимо провести изолинии, т. е. линии, соединяющие точки, в которых N имеет одно и то же значение. Задача проведения изолиний, простая при значительной густоте съемки, делается крайне сложной, если точки, где наблюдается N , находятся на значительном расстоянии друг от друга.

Обычно на карте совсем нет точек с желаемым значением; так например, на карте в определенном районе могут быть точки, где N равно 1,025; 0,938; 0,925; 1,101; 1,002; 0,933 и т. д., в этом районе совершенно не наблюдается точки с $N=1,000$. Между тем может потребоваться как раз проведение изолинии $N=1,000$.



Фиг. 4

Обычно для вычерчивания изолиний пользуются соображениями следующего характера: если точки a, b, c, d, e, f расположены так, как это изображено на фиг. 4, то точка A с $N=1,000$ должна лежать между a и b , причем так как разность значений $N=1,025$ и $N=1,000$ меньше, чем $N=1,000$ и $N=0,938$, то точка 1,000 лежит ближе к a , чем к b . Пусть эта точка есть A . Таким же образом находят точки B, C, D и т. д.

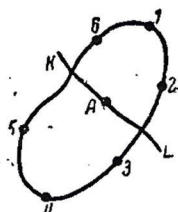
Проводя через эти точки линию, мы получаем искомую изолинию $MAB CDEK$.

Вместо того, чтобы на-глаз располагать точки A, B, C и т. д., можно их положение находить линейной интерполяцией. Тогда, если в точке a значение N равно N_2 , и в точке b $N=N_1$, то N в точке A равно $N_0=N_1 + \frac{N_2-N_1}{l} \cdot x$, где x есть расстояние A от b . Расстояние A от b , равное x , выразится таким образом через

$$x = \frac{N_0 - N_1}{N_2 - N_1} l.$$

На линейной интерполяции основан метод отыскания точек A, B, C и т. д., предложенный математическим отделом Института теоретической геофизики Академии Наук. По этому методу предварительно все изучаемое пространство разбивается на систему треугольников, на сторонах которых находятся интерполяцией точки, принадлежащие искомой изолинии. Разбивая все точки наблюдения на разные системы треугольников и находя на сторонах этих треугольников интерполяцией точки искомой изолинии, можно, если полученные точки ложатся на одну и ту же непрерывную кривую, считать ее за изолинию.

Проведение изолиний часто бывает затруднено тем, что при малом количестве точек бывает трудно решить вопрос о направлении изолинии в данной точке. Возможны случаи, когда с равной вероятностью изолинии можно представить в виде кривых, вытянутых или по направлению параллелей или по направлению меридианов. В этом случае могут помочь дополнительные измерения вокруг точки A (фиг. 5).



Фиг. 5

Пусть в точках 2 и 6 значение N больше, чем в A , в точках 5 и 3 меньше, чем в A . Тогда изолиния KAL , проходящая через A , должна проходить между точками 5 и 6, 3 и 2. Измерения величины N в точках 1, 2, 3, 4, 5, 6 могут быть сделаны с небольшой точностью.

Для суждения о ходе изолиний имеют большое значение указания геологов на предполагаемую структуру изучаемой местности.

§ 8. Относительно проведения изолиний, как мы видели выше, можно дать только самые общие указания. Почти никогда нельзя быть вполне уверенным, что кривая, изображающая изолинию на карте, верна во всех деталях. Поэтому очень важно, имея начерченные изолинии X и Y , каким-либо способом убедиться, что они начерчены верно. Мы рассмотрим здесь способ, основанный на теории потенциала и позволяющий путем простых измерений на карте произвести контроль нанесения изолиний [6].

Как известно, гравитационное поле Земли целиком зависит от потенциала. Магнитное поле Земли в первом приближении также зависит только от потенциала магнитных масс, расположенных в теле земного шара. Поэтому для гравитационного поля совершенно точно, а для геомагнитного поля с большим приближением можно представить прямоугольные компоненты силы X , Y , Z через частные производные потенциала V :

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}; \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}; \quad Z = -\frac{\partial V}{\partial z}. \quad (7)$$

X есть северная компонента, Y — восточная и Z — вертикальная; $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ суть функции координат x , y , z .

Пусть в некоторой точке пространства над Землей компонента $X=A$ компонента $Y=B$ и компонента $Z=C$. Положив

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} = A; \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y} = B; \quad Z = -\frac{\partial V}{\partial z} = C, \quad (8)$$

получаем уравнения трех поверхностей, на первой из которых $X=A$, на второй $Y=B$ и на третьей $Z=C$. Эти поверхности мы назовем изодинамическими поверхностями или изоповерхностями.

Из уравнений (8) легко получить дифференциальные уравнения изоповерхностей. Напишем дифференциальные уравнения для изоповерхностей X и Y :

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad & \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} dy + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} dz = 0, \\ (b) \quad & \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} dy + \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} dz = 0, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

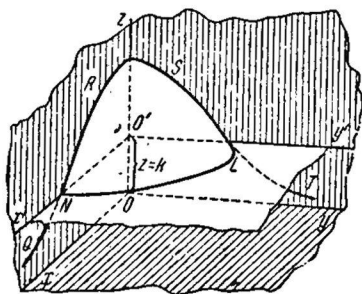
(a) есть дифференциальное уравнение для $X=A$, (b) — дифференциальное уравнение для $Y=B$.

Представим на фиг. 6 поверхность $X = -\frac{\partial V}{\partial x} = A$ в виде поверхности $QRST$. Если пересечь поверхность $X=A$ плоскостью $z = k = \text{const}$, параллельной плоскости координат xy , получается линия LN , на которой X постоянна и равна A . Линия LN представляет собой изодинаму X или изолинию X . Такое же построение можно произвести для Y и для Z .

Чтобы получить дифференциальное уравнение для изолинии X , достаточно в дифференциальном уравнении (9) (a) положить $dz=0$ и следовательно считать, что z постоянно. Линия, изучаемая нами, лежит в плоскости, параллельной плоскости xy .

Таким образом дифференциальное уравнение линии LN находится в виде:

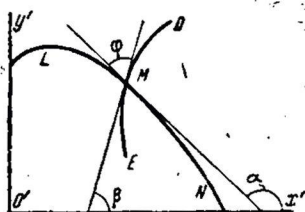
$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} dy = 0.$$



Фиг. 6

Отсюда легко получается тангенс угла α наклона касательной к изолинии $X=A$ в точке M (фиг. 7),

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = a = - \frac{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}}{\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}}. \quad (10)$$



Фиг. 7

Из дифференциального уравнения (9) (b) находим для тангенса угла β касательной к изолинии Y (линия DE) выражение

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{dy}{dx} = b = - \frac{\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}}{\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}}. \quad (11)$$

Угол φ , представляющий собой угол пересечения касательных к изолиниям $X=A$ и $Y=B$, выражается через a и b , как известно, так:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b-a}{1+ab}.$$

Подставляя вместо a и b их значения из (10) и (11), находим

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \right)^2}{\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right)}. \quad (12)$$

§ 9. Если бы изолинии X и Y пересекались под прямым углом, то критерий верности нанесения изолиний был бы очень прост и из наложения карт изолиний X и Y сразу было бы видно, будут ли они ортогональны или нет. Неоднократно выражалось мнение, что ортогональность X и Y должна наблюдаться всегда.

Как видно из формулы (12), ортогональность изолиний не наблюдается всегда и нужны особые условия, чтобы ортогональность существовала.

В случае пересечения изолиний X и Y под прямым углом

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \varphi = \infty.$$

Таким образом

$$\frac{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \right)^2}{\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right)} = \infty. \quad (13)$$

Чтобы левая часть (13) равнялась бесконечности, нужно, чтобы числитель равнялся бесконечности и знаменатель не равнялся бесконечности, или чтобы знаменатель равнялся нулю и одновременно числитель не обращался в нуль. Числитель и знаменатель не могут равняться бесконечности, так как потенциал и все его производные в пространстве, не заключающем тяжелых или магнитных масс, не обращаются в бесконечность. Остаются следовательно условия, что при ортогональности или $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$ или $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = 0$. В обоих случаях числитель не должен обращаться в нуль.

Остановимся прежде всего на условии $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$. Сделаем предположение, что одновременно числитель уравнения (13) равен нулю. Таким образом, по нашему предположению, должно быть

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0. \quad (14)$$

После возведения $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$ в квадрат получим

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0.$$

Подставляя из этого последнего уравнения $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ в уравнение (14), находим

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0.$$

Это равенство возможно только при условии, что $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$; $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$; $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = 0$; имея в виду, что кроме того во всем пространстве над Землей $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$, находим, что для изучаемой плоскости $z = \text{const}$ и $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$.

Из равенств $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$, $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$ следует, что в исследуемой области $\frac{\partial V}{\partial x}$ есть функция только y и z , что $\frac{\partial V}{\partial y}$ есть функция только x и z и что $\frac{\partial V}{\partial z}$ есть функция только x , y . Таким образом

$$\frac{\partial V}{\partial x} = F_1(y, z); \quad \frac{\partial V}{\partial y} = F_2(x, z); \quad \frac{\partial V}{\partial z} = F_3(y, x). \quad (15)$$

Так как кроме того $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = 0$, то $\frac{\partial V}{\partial x}$ не зависит от y и $\frac{\partial V}{\partial y}$ не зависит от x , и уравнения (15) переходят в

$$\frac{\partial V}{\partial x} = f_1(z); \quad \frac{\partial V}{\partial y} = f_2(z); \quad \frac{\partial V}{\partial z} = F_3(y, x). \quad (14a)$$

Если мы возьмем плоскость, параллельную горизонту xy , где выполнены условия (14a), то слагающие силы по X и Y , выражающиеся через $-\frac{\partial V}{\partial x}$ и $-\frac{\partial V}{\partial y}$, будут во всей плоскости постоянны и будут меняться с высотой z над плоскостью xy ; горизонтальная составляющая $H = \sqrt{X^2 + Y^2}$ будет во всей плоскости, где исследуются X и Y , постоянна.

Таких условий в природе не встречается, и следовательно, если $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$, то числитель уравнения (13) нулю не равен, и соблюдаются условия ортогональности пересечения X и Y .

Так например, если составляющая $Z = -\frac{\partial V}{\partial z}$ для всех расстояний вдоль перпендикуляра к горизонтальной поверхности Земли была бы постоянна, не завися от z , то выполнялось бы условие ортогональности $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$.

В частном случае, если $Z = -\frac{\partial V}{\partial z} = 0$, то условие $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$ выполнено и ортогональность X и Y должна бы наблюдаться.

Условия постоянства Z вдоль перпендикуляра к поверхности Земли, равно как и условие $Z = 0$ в явлениях геомагнетизма и гравитации не встречаются, и ортогональность, зависящая от постоянства Z вдоль нормали к поверхности Земли, практического значения не имеет.

Рассмотрим теперь второе условие $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = 0$, когда должна наблюдаться ортогональность X и Y . Мы видим, что при этом X не зависит от y и Y не зависит от x .

При ортогональности кроме того $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right)^2$ не должно равняться нулю. Допустим, что это последнее выражение равно нулю; так как кроме того $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = 0$, то должно быть

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0.$$

Таким образом или $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$, или $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$, или обе величины $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ обращаются в нуль.

Можно подобрать примеры значений V , когда указанные условия удовлетворяются. Так например, если $V = ax + by + cz^2$, то

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= a, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = b, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 2cz, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 2c, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = 0. \end{aligned}$$

Из уравнения Лапласа ясно, что $c = 0$. Мы имеем случай, когда $\operatorname{tg} \varphi = \frac{0}{0}$.

Возможны однако случаи, когда $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = 0$, а $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ не обращаются в нуль. Такой случай будет, если

$$V = ax^2 + by^2 + cz^2, \text{ причем } a + b + c = 0.$$

тогда

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2ax, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 2by, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 2cz$$

и

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 2a, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 2b, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = 0.$$

Уравнение (12) дает в этом случае

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{4ab}{0}.$$

Таким образом ортогональность в этом случае наблюдается.

Мы можем написать значение V в гораздо более общем виде. Так как $\frac{\partial V}{\partial x}$ не зависит от y и $\frac{\partial V}{\partial y}$ не зависит от x , то, положив

$$V = f(x, z) + \varphi(y, z) + \psi(z),$$

отсюда имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x} &= f'_x(x, z), \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \varphi'_y(y, z), \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= f'_z(x, z) + \varphi'_z(y, z) + \psi'_z(z), \text{ откуда вытекает, что} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} &= 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, z), \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \varphi''_{yy}(y, z).\end{aligned}$$

Кроме того должно быть

$$f''_{xx}(x, z) + \varphi''_{yy}(y, z) + f''_{zz}(x, z) + \varphi''_{zz}(y, z) + \psi''_{zz}(z) = 0.$$

Таким образом возможно, что $\operatorname{tg} \varphi = \infty$, и следовательно, имеется ортогональность. Однако едва ли можно найти в природе условия, когда и этот второй критерий ортогональности выполняется.

§ 10. Мы изложим теперь метод проверки верности нанесения изолиний X и Y . Как мы видели выше [формула (12)] изолинии X и Y дают пересечения под углом φ , связанным с потенциалом V так:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \right)^2}{\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right)}. \quad (12)$$

Из уравнений потенциала (7) легко найти, что

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{\partial X}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{\partial Y}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Подставляя эти выражения в уравнения (12), находим

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{\partial X}{\partial x} \cdot \frac{\partial Y}{\partial y} - \left(\frac{\partial X}{\partial y} \right)^2}{\frac{\partial Y}{\partial x} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right)}. \quad (16)$$

Если на одной и той же карте нанесено поле изолиний X и Y , легко графическим путем найти $\frac{\partial X}{\partial x}$, $\frac{\partial Y}{\partial x}$, $\frac{\partial X}{\partial y}$, $\frac{\partial Y}{\partial y}$ и вычислить $\operatorname{tg} \varphi$, подставляя значения $\frac{\partial X}{\partial x}$, $\frac{\partial Y}{\partial y}$, $\frac{\partial X}{\partial y}$, $\frac{\partial Y}{\partial x}$ в уравнение (16). С другой стороны, $\operatorname{tg} \varphi$ можно найти непосредственно, измеряя угол φ на карте, дающей одновременно изолинии X и Y . Если $\operatorname{tg} \varphi$, найденный вычислением по формуле (16) и полученный из непосредственного измерения на карте угла φ , совпадает в пределах возможных погрешностей наблюдений, то система изолиний представляет возможное их распределение, и следовательно поле изолиний нанесено удовлетворительно.

§ 11. Мы видели в § 10, что критерий правильности нанесения изолиний [формула (16)] прилагается к полю, описываемому тремя ортогональными компонентами X , Y , Z . Легко показать, что представленное таким путем поле дает удобные средства без всяких дальнейших расчетов отметить положение аномалий. В самом деле, поле, наблюдаемое в некоторой точке Земли A , складывается из нормального поля F_n и поля аномального F_a , складывающиеся которых X_n , Y_n , Z_n и X_a , Y_a , Z_a , связаны со слагающими X , Y , Z , наблюдаемыми на опыте в точке A , следующим образом:

$$\begin{aligned}X &= X_n + X_a, \\ Y &= Y_n + Y_a, \\ Z &= Z_n + Z_a.\end{aligned}$$

Если участок Земли, подлежащий исследованию, небольшой, нормальные слагающие X_n , Y_n , Z_n мало изменяются в пределах изучаемого района и максимумы и минимумы X_a , Y_a , Z_a почти совпадают с максимумами и минимумами X , Y , Z .

Таким образом легко отыскиваются на картах, представляющих X , Y , Z , те места, где имеются значительные аномальные составляющие силы и очерчиваются границы аномалии. При обычных методах магнитной съемки измеряются вертикальная составляющая поля Z , горизонтальная составляющая H и склонение D (первый способ) или горизонтальная составляющая H , наклонение I и склонение D (второй способ).

X , Y и Z связаны с измеренными на опыте величинами H , D , I так:

$$\begin{aligned} X &= H \cos D, \\ Y &= H \sin D, \\ Z &= H \operatorname{tg} I. \end{aligned}$$

Так как подсчеты компонент поля X , Y , Z из H , D , I или H , Z , D представляют собой длительную вычислительную работу, и в то же время X , Y , Z , как видно из сказанного, удобнее и проще характеризуют поле, то выгодно было бы сразу получить при измерениях магнитного поля Земли компоненты X , Y , Z . Одной из ближайших задач практической геофизики должна являться разработка метода непосредственного определения величин X , Y , Z .

Институт теоретической геофизики
Академии Наук СССР

Получено
5.XI.1939

ЛИТЕРАТУРА

1. Lasareff P., Доклады Академии Наук (1923), 31.
2. Lasareff P. C. R. (Paris), 178 (1924), 510.
3. Lasareff P., Journal de physique, série VI, 5 (1924), 182.
4. Lasareff P., Gerlands Beiträge zur Geophysik, 15 (1926), 77.
5. Gutenberg B., Lehrbuch der Geophysik (Artikel von J. Bartels, S. 555), Berlin, 1929.
6. Лазарев П. П., Доклады Академии Наук, XXV (1939), 31.

P. LASAREFF. SUR LES PRINCIPES GÉNÉRAUX DE LA CARTOGRAPHIE GÉOPHYSIQUE

RÉSUMÉ

Les observations géophysiques contiennent deux procédés distincts: on mesure au point A la valeur d'une quantité physique N (composantes X , Y , Z de la force géomagnétique, de la gravité, etc.) et on détermine ensuite la position de A par rapport à la surface du globe. La précision des recherches géophysiques dépend donc d'un côté des erreurs inévitables de l'expérience physique et d'un autre côté de la précision des opérations géodésiques et du nombre des stations géophysiques par kilomètre carré.

Le but du présent travail est de fournir la base exacte à la cartographie géophysique.

Soit G la variation relative de la valeur N par kilomètre, M l'échelle de la carte, F l'erreur relative de la méthode physique avec laquelle on mesure la quantité N , δ le diamètre de petit cercle, représentant sur la carte le point A . On peut déduire la formule

$$F = \frac{G\delta}{M} \quad (1)$$

Un exemple emprunté des recherches de l'anomalie magnétique de Koursk montre l'application de cette formule. G (pour la valeur Z) est égale aux environs de Stchigry 0,5 (les distances sont mesurées en km), $\delta = 1 \text{ mm} = 10^{-6} \text{ km}$, $F = 0,01$. On reçoit de ces données l'échelle de la carte

$$M = \frac{1}{20\,000}.$$

Malgré la petite précision de mesures magnétiques (1%) on doit employer la carte d'une grande échelle (1 : 20 000) et les travaux spéciaux de triangulation ont été exécutés dans le domaine de l'anomalie.

La seconde question est la question des distances mutuelles des stations géophysiques, où on mesure la valeur N .

Si d est la distance sur la carte des petits cercles représentant les points de la surface terrestre, on peut déduire que la densité n (n est le nombre des stations par km^2) est égale à

$$n = \frac{M^2}{d^2}. \quad (2)$$

Si on prend l'exemple de l'anomalie de Koursk, $M = \frac{1}{20\,000}$ et $d = 10 \text{ mm} = 10^{-5} \text{ km}$, on déduit

$$n = 25.$$

La densité n dans le domaine de l'anomalie de Koursk doit donc être égale à 25. La surface totale de l'anomalie est 800 km^2 environ et le nombre des stations est égale à

$$800 \times 25 = 20\,000.$$

Le nombre des stations était pendant la levée de l'Anomalie de Koursk (1918—1926) 19 000 environ. Nous voyons que la densité réelle presque coïncide avec la densité théorique.

Après avoir fait les mesures de N sur la surface étudiée on trace les isolignes de N . Dans l'article présent plusieurs méthodes sont développées qui facilitent le tracé des isolignes. Si la carte des isolignes est faite, il est désirable de pouvoir contrôler la disposition mutuelle des isolignes X et Y .

L'auteur donne une méthode simple de contrôle qui est fondée sur la théorie du potentiel.

Si X , Y , Z sont les composantes orthogonales de la force ayant le potentiel V , on a

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial V}{\partial z}. \quad (3)$$

Les équations différentielles des isolignes de X et de Y sont

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} dy = 0 \text{ (isolignes de } X),$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} dy = 0 \text{ (isolignes de } Y).$$

Les isolignes X et Y se coupent sous un angle φ dont la tangente est égale à

$$\text{tg } \varphi = \frac{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right)^2}{\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)}. \quad (4)$$

Au lieu de $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$ on peut introduire les valeurs $\frac{\partial X}{\partial x}$, $\frac{\partial Y}{\partial y}$, $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$ et on a,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{\partial X}{\partial x} \cdot \frac{\partial Y}{\partial y} - \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2}{\frac{\partial Y}{\partial x} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)} \quad (5)$$

On obtient par une méthode graphique, exécutée sur la carte des isolignes X et Y , les valeurs $\frac{\partial X}{\partial x}$, $\frac{\partial Y}{\partial y}$, $\frac{\partial X}{\partial y}$, $\frac{\partial Y}{\partial x}$. Après la substitution de ces valeurs dans l'équation (5) on reçoit la valeur de $\operatorname{tg} \varphi$ calculée de la théorie du potentiel.

D'un autre côté on mesure φ directement sur la carte. La comparaison de ces deux valeurs de $\operatorname{tg} \varphi$ (calculée et mesurée) nous donne le criterium permettant de corriger la carte des isolignes, si la valeur de $\operatorname{tg} \varphi$ calculée ne coïncide pas avec celle mesurée directement.

La formule (4) montre que les isolignes se coupent orthogonalement, si

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = 0.$$

L'étude approfondie de ces deux cas montre que les conditions

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = 0$$

peuvent être remplies dans les cas très rares.

A la fin de son article l'auteur indique la nécessité du développement des méthodes expérimentales permettant de mesurer directement X , Y , Z .