

Н. Н. КОРЫТНИКОВА

ВЛИЯНИЕ ВОДНЫХ БАССЕЙНОВ НА ТЕПЛОВОЙ РЕЖИМ ПРИЛЕГАЮЩИХ УЧАСТКОВ ЗЕМНОЙ КОРЫ

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом)

Автор исследует охлаждение земной коры вблизи крупных водных бассейнов, давая математическое решение задачи о распределении температуры вокруг бассейна при некоторых определенных упрощающих предположениях. Распространение охлаждения, вызываемого холодными водными массами, подробно рассматривается для Байкала, причем получается, что под дном озера это охлаждение должно быть весьма значительным до больших глубин, по бокам же озера оно мало заметно. Увеличение, по сравнению с нормальным, теплового потока под дном водного бассейна, являющееся результатом разности температур воды на дне бассейна и земной коры на той же глубине, вычисляется автором для Байкала, Танганьики, Crater Lake и озера Chelan.

В связи с разработкой вопроса о термическом взаимодействии водных масс Байкала с его дном, которая в настоящее время производится Байкальской лимнологической станцией Академии Наук СССР, Г. Ю. Верещагин обратился ко мне с просьбой выяснить возможное влияние теплового потока, идущего из недр Земли, на термическое состояние придонного слоя воды в глубоких озерах и в частности в Байкале.

Неоднократно высказывалось мнение, что крупные водные бассейны должны вызывать охлаждение прилегающих участков земной коры; на существовании такого охлаждения особенно настаивает В. И. Вернадский [1], указывающий на Байкал, как на объект, на котором это явление должно было бы хорошо наблюдаться. В таком случае геотермическая ступень, служащая мерой повышения температуры в Земле, должна быть уменьшена под дном водных бассейнов и увеличена на берегу их. Как велико это охлаждение, вызываемое присутствием больших масс холодной воды, и как далеко распространяется оно в глубину Земли, является вопросом большой научной важности, до сих пор не решенным. Бурить скважины на дне водных бассейнов и измерять в них температуру в настоящее время еще не представляется возможным, и потому мы не можем на опыте проверить предполагаемое уменьшение ступени под дном.

Геотермические измерения в скважинах на берегу имеются, — германский геофизик Кенигсбергер [2], приводя в одной из своих работ целый ряд наблюдаемых больших величин геотермической ступени, объясняет их именно присутствием вблизи места наблюдения больших масс воды. Но увеличение ступени может быть вызвано также наличием пород большой теплопроводности и некоторыми другими причинами, и потому очень трудно установить, какая часть наблюдаемого увеличения ступени может быть отнесена за счет охлаждающего действия водного бассейна. Даже если бы такое расчленение и удалось произвести, то все же сомнительно, чтобы по охлаждению по бокам бассейна можно было сделать заключение о величине и распространении

этого охлаждения в вертикальном направлении под дном его. Поэтому математическое решение этого вопроса представляет известный интерес. Физические условия вокруг реально существующих водных бассейнов всегда очень сложны, и при математическом рассмотрении их приходится заменять более простыми; поэтому полученное решение будет соответствовать действительности лишь постольку, поскольку ей соответствуют положенные в основу его допущения, которые должны быть точно сформулированы вначале.

§ 1. Общее решение

Для возможности математического решения задачи о распределении температуры вокруг водного бассейна сделаны следующие допущения:

1) поверхность Земли плоская и в ней имеется углубление, наполненное водой;

2) распределение температуры не зависит от времени;

3) поверхность Земли и дно водного бассейна имеют постоянную температуру T_0 ;

4) земная кора вокруг и под дном водного бассейна имеет одну теплопроводность; на достаточно большом расстоянии от него геотермический градиент γ постоянен и изотермические поверхности имеют вид горизонтальных плоскостей;

5) водный бассейн имеет форму половины эллипсоида, разрезанного плоскостью, проходящей через две его оси и расположенного так, что эта плоскость совпадает с земной поверхностью.

Возьмем начало прямоугольной системы координат в центре водной поверхности (в центре эллипсоида), направим ось z вертикально вниз, ось x по малой оси эллипса, огибающего воду на земной поверхности, ось y по его большой оси. Пусть c — глубина водного бассейна, $2a$ — ширина и $2b$ — длина его. При сделанных допущениях температура u в земной коре должна удовлетворять уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

при условии $u = T_0$ на земной поверхности, т. е. в плоскости $z = 0$, и на поверхности эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

представляющего дно водного бассейна. На большом расстоянии от эллипсоида, т. е. при x , y или z , стремящемся к бесконечности, выражение температуры u как функции координат асимптотически приближается к виду $u = T_0 + \gamma z$.

Решение, удовлетворяющее всем поставленным требованиям, дается формулой

$$u = T_0 + \gamma z \left[1 - \frac{2}{Z_0} \int_0^\infty \frac{ds}{(c^2 + s) D(s)} \right], \quad (1)$$

где

$$D(s) = \sqrt{\left(1 + \frac{s}{a^2}\right) \left(1 + \frac{s}{b^2}\right) \left(1 + \frac{s}{c^2}\right)}; \quad Z_0 = 2 \int_0^\infty \frac{ds}{(c^2 + s) D(s)}$$

и λ — положительный корень уравнения

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1. \quad (2)$$

Формулы эти получаются следующим образом. Если в неограниченной среде, в которой проходит стационарный тепловой поток, помещено тело другой теплопроводности, то задача о распределении температуры и внутри и вне этого тела будет тождественна с задачей нахождения магнитного потенциала для того же тела, намагниченного индукцией внешнего магнитного поля, направление которого совпадает с направлением теплового потока. В обоих случаях имеем те же самые дифференциальные уравнения и пограничные условия и нужно только магнитную проницаемость заменить отношением коэффициентов теплопроводности тела и окружающей среды. Пусть тело есть эллипсоид, и направление теплового потока параллельно одной из его осей, которую мы примем за ось z ; для решения тепловой задачи воспользуемся в этом случае давно известным интегралом магнитного потенциала (см. например [3]). Получим

$$u_i = T_0 + \frac{4\gamma}{4 + Z_0(\mu - 1)} z;$$

$$u_n = T_0 + \gamma z - \frac{2(\mu - 1)\gamma}{4 + Z_0(\mu - 1)} z \int_{\lambda}^{\infty} \frac{ds}{(c^2 + s)D}.$$

В диаметральной плоскости, перпендикулярной направлению теплового потока $z = 0$, и температура будет постоянной $u_i = u_n = T_0$; поэтому для получения нужной нам формулы распределения температуры вокруг водного бассейна все неограниченное пространство, вмещающее эллипсоид, можно рассечь по этой плоскости и верхнюю половину отбросить. Далее, для того чтобы не только плоскость $Z_0 = 0$, но и вся поверхность эллипсоида имела температуру T_0 , нужно только положить $\mu = \infty$, что и приведет нас к формуле (1).

В общем случае трехосного эллипсоида интеграл, входящий в формулу (1), взять нельзя, и потому все вычисления температур по формуле (1) сведутся к приближенному вычислению интегралов. В двух случаях однако можно избежать этих утомительных вычислений, именно когда контур водного бассейна на земной поверхности представлен кругом или очень вытянутым эллипсом.

§ 2. Круглые бассейны

В этом случае $b = a$, кроме того, $a > c$, так как для всех реально существующих водных бассейнов глубина их меньше радиуса. Интеграл, входящий в формулу (1), будет

$$\int_{\lambda}^{\infty} \frac{ds}{(c^2 + s) \sqrt{\left(1 + \frac{s}{a^2}\right)^2 \left(1 + \frac{s}{c^2}\right)}} = a^2 c \int_{\lambda}^{\infty} \frac{ds}{(a^2 + s)(c^2 + s)^{3/2}} =$$

$$= 2a^2 c \left[\frac{1}{q^2} \frac{1}{\sqrt{c^2 + \lambda}} + \frac{1}{q^3} \arctg \frac{\sqrt{c^2 + \lambda}}{q} - \frac{1}{q^3} \frac{\pi}{2} \right],$$

где

$$q = \sqrt{a^2 - c^2}.$$

Формула распределения температуры вокруг водного бассейна будет

$$u = T_0 + \gamma z \left[1 - \frac{4a^2 c}{Z_0} \left(\frac{1}{q^2} \frac{1}{\sqrt{c^2 + \lambda}} + \frac{1}{q^3} \arctg \frac{\sqrt{c^2 + \lambda}}{q} - \frac{1}{q^3} \frac{\pi}{2} \right) \right]; \quad (3)$$

здесь

$$Z_0 = \frac{4a^2}{q^2} \left[1 - \frac{c}{q} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{c}{q} \right) \right], \quad (4)$$

$$c^2 + \lambda = \frac{1}{2} \left\{ r^2 + z^2 - q^2 + \sqrt{[r^2 + z^2 - a^2 - c^2]^2 + 4[c^2 r^2 + a^2 z^2 - a^2 c^2]} \right\},$$

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

§ 3. Очень длинные бассейны

Интеграл, входящий в формулу (1), введением новой переменной $v = \frac{s}{c^2}$, преобразуется так:

$$\int_{\frac{\lambda}{c^2}}^{\infty} \frac{ds}{(c^2 + s) D(s)} = \int_{\frac{\lambda}{c^2}}^{\infty} \frac{dv}{(1+v) \sqrt{(1+v) \left(1 + \frac{c^2}{a^2} v\right) \left(1 + \frac{c^2}{b^2} v\right)}}. \quad (5)$$

Для очень длинных бассейнов величина $\frac{c^2}{b^2}$ будет очень мала и $\sqrt{1 + \frac{c^2}{b^2} v}$ будет очень мало отличаться для не слишком больших значений v . Для очень же больших v значение подинтегральной функции близко к нулю, и небольшое отклонение множителя $\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{c^2}{b^2} v}}$ от единицы не может его изменить

в заметной при практических вычислениях степени. Это значит, что для очень длинных бассейнов, при приближенном вычислении, интегралы

$$\int_{\frac{\lambda}{c^2}}^{\infty} \frac{dv}{(1+v) \sqrt{(1+v) \left(1 + \frac{c^2}{a^2} v\right) \left(1 + \frac{c^2}{b^2} v\right)}} \quad \text{и} \quad \int_{\frac{\lambda}{c^2}}^{\infty} \frac{dv}{(1+v) \sqrt{(1+v) \left(1 + \frac{c^2}{a^2} v\right)}}$$

получатся равными, и потому их можно заменить один другим; но второй интеграл берется в конечном виде

$$\int_{\frac{\lambda}{c^2}}^{\infty} \frac{dv}{(1+v) \sqrt{(1+v) \left(1 + \frac{c^2}{a^2} v\right)}} = \frac{2 \frac{a}{c}}{a^2 - 1} \left[-1 + \sqrt{\frac{\frac{a^2}{c^2} + \frac{\lambda^2}{c^2}}{1 + \frac{\lambda}{c^2}}} \right].$$

Для Z_0 получим

$$Z_0 = \frac{4 \frac{a}{c}}{\frac{a}{c} + 1} = \frac{4}{1 + \frac{c}{a}}, \quad (6)$$

и формула (1) заменится следующей:

$$u = T_0 + \gamma z \left[1 - \frac{1}{\frac{a}{c} - 1} \left(\sqrt{\frac{\frac{a^2}{c^2} + \frac{\lambda}{c^2}}{1 + \frac{\lambda}{c^2}}} - 1 \right) \right], \quad (7)$$

здесь λ , как и в общем случае, есть положительный корень уравнения (2).

Следует помнить, что формула (7) не является точным решением задачи (так как не удовлетворяет уравнению Лапласа во всем полупространстве, окружающем половину эллипсоида), а только служит для приближенного вычисления температуры вокруг водного бассейна. Формула эта могла бы считаться точным решением только для случая бесконечно длинного бассейна ($b = \infty$), но таких в природе не существует.

Для каждого отдельного водного бассейна нужно предварительно исследовать, насколько замена формулы (1) на (7) является допустимой, подобно тому, как это сделано в § 6 для Байкала.

§ 4. Тепловой поток на дне

По сделанному в § 1 допущению дно водного бассейна представляет собою изотермическую поверхность, поэтому тепловой поток, входящий в воду со дна, будет направлен по нормали к нему и равен произведению k — коэффициента теплопроводности породы, образующей дно, на $\frac{du}{dn}$ — производную от температуры по нормали. Так как, по сделанному допущению, теплопроводность земной коры вокруг водного бассейна постоянна, то изменение теплового потока будет зависеть только от изменения $\frac{du}{dn}$; вычислим эту производную по формуле

$$\frac{du}{dn} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos(nx) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(ny) + \frac{\partial u}{\partial z} \cos(nz).$$

Для эллипсоида имеем

$$\begin{aligned} \cos(nx) &= \frac{\frac{x}{a^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}; & \cos(ny) &= \frac{\frac{y}{b^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}; \\ \cos(nz) &= \frac{\frac{z}{c^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}. \end{aligned}$$

В уравнение (1) x и y явно не входят, и потому $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial y}$; для производной по z получается

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \gamma \left[1 - \frac{2}{Z_0} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{ds}{(c^2 + s) D(s)} \right] + \frac{\partial u}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial z}.$$

Из того же уравнения (1) найдем

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} = \gamma z \frac{2}{Z_0} \frac{1}{(c^2 + \lambda) D(\lambda)}.$$

Из уравнения (2) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial x} &= \frac{2x}{a^2 + \lambda} \cdot \frac{1}{\frac{x^2}{(a^2 + \lambda)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + \lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + \lambda)^2}}; \\ \frac{\partial \lambda}{\partial y} &= \frac{2y}{b^2 + \lambda} \cdot \frac{1}{\frac{x^2}{(a^2 + \lambda)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + \lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + \lambda)^2}}; \\ \frac{\partial \lambda}{\partial z} &= \frac{2z}{c^2 + \lambda} \cdot \frac{1}{\frac{x^2}{(a^2 + \lambda)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + \lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + \lambda)^2}}. \end{aligned}$$

Подставляя все найденные величины в формулу для $\frac{du}{dn}$ и принимая во внимание, что на поверхности эллипсоида $\lambda=0$, получим

$$\begin{aligned} \frac{du}{dn} &= \left(\frac{\partial u}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=0} \left[\frac{\partial \lambda}{\partial x} \cos(nx) + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \cos(ny) + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \cos(nz) \right]_{\lambda=0} = \\ &= \frac{4}{Z_0} \gamma z \frac{1}{c^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}} \end{aligned} \quad (8)$$

Из последней формулы видно, что тепловой поток, входящий в воду, не будет постоянным на всем дне. Обычным приемом нахождения экстремума получим, что $\frac{du}{dn}$ имеет максимум в точке $x=y=0, z=c$:

$$\left(\frac{du}{dn} \right)_{\max} = \frac{4}{Z_0} \gamma. \quad (9)$$

Функция Z_0 не зависит от абсолютных размеров эллипсоида, а только от его формы (т. е. от отношений $\frac{a}{c}$ и $\frac{b}{c}$), и будет всегда меньше 4, поэтому $\frac{4}{Z_0} \gamma > \gamma$. Следовательно тепловой поток, входящий в воду со дна под центральной частью водного бассейна, будет всегда больше теплового потока в земной коре вдали от него. С удалением от центра тепловой поток, входящий в воду, уменьшается и на дневной поверхности при $z=0$ он равен нулю. Чтобы проследить, как быстро идет это уменьшение, найдем на дне линию, выше которой поток, входящий в воду, меньше $k\gamma$ — потока в земной коре вдали от водного бассейна. Для этого положим $\frac{du}{dn} = \gamma$, тогда по формуле (8)

$$\frac{4}{Z_0} \cdot \frac{z}{c^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}} = 1;$$

возведя это равенство в квадрат, освободившись от знаменателя и перенеся все члены в одну сторону, получим уравнение конуса

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} - \frac{z^2}{c^4} \cdot \left(\frac{16}{Z_0^2} - 1 \right) = 0, \quad (10)$$

пересечение которого с эллипсоидом, представляющим дно, дает искомую линию. Для нахождения глубины этой линии от земной поверхности необходимо задаться размерами водного бассейна (т. е. знать a, b и c); результаты таких вычислений для Байкала приводятся в § 6.

§ 5. Приложение общей теории к озерам

Прилагать выведенные в §§ 1—4 формулы к реально существующим водным бассейнам можно лишь тогда, когда для последних справедливы допущения, сделанные при выводе этих формул. Для морей и океанов, занимающих громадные площади, эти допущения едва ли можно считать удовлетворительными, для озер же, размеры которых невелики по сравнению с размерами окружающей их суши, их, повидимому, принять можно.

Озера, даже самые большие, все же не настолько велики, чтобы нельзя было пренебречь сфероидальной формой Земли и считать ее плоской. Гораздо большие расхождения между вычисленными температурами и действительными может вызвать присутствие гор вблизи озера. Но, во-первых, целью настоящей работы является исследование влияния только самих водных бассейнов на тепловой режим прилегающих участков суши; во-вторых, введение

в рассмотрение рельефа земной поверхности внесло бы большие математические трудности и сделало бы решение настолько сложным, что оно могло бы оказаться непригодным для приложений.

Допущение, что дно озера и поверхность Земли имеют одну постоянную температуру, можно принимать только приближенно. В верхнем слое Земли температура испытывает годовые колебания, но так как слой этот сравнительно невелик (приблизительно порядка 30 м), а нас интересуют только глубокие озера и охлаждение, вызываемое ими на больших глубинах, то можно считать, что допущение о стационарном распределении температуры не вносит заметных ошибок. Кроме того, измерения температуры воды у дна глубоких озер дают постоянную температуру, которая обычно бывает довольно близка к средней годовой температуре воздуха около озера.

Формула (1) получена в предположении, что земная кора вокруг водного бассейна имеет одну теплопроводность и что, кроме его охлаждающего влияния, не существует иных причин, могущих вызвать изменение геотермического градиента. На самом деле это не всегда бывает так: изменение градиента может быть вызвано наличием пород разной теплопроводности, циркуляцией подземных вод, химическими реакциями, происходящими в земной коре, и многими другими факторами, учесть которые все заранее не представляется возможным. Поэтому температуры, вычисленные по формулам (1) — (7), должно рассматривать только как приближенные значения истинных, показывающие, какие температуры были бы около озера, если бы земная кора вокруг него была вполне однородна. Тем не менее эти вычисленные температуры представляют большой интерес, так как позволяют сделать заключение о степени охлаждения, вызываемого озером в прилегающих участках земной коры, и о его распространении в горизонтальном и вертикальном направлениях.

Для того чтобы произвести такие исследования, необходимо задаться размерами водного бассейна, и потому это лучше всего сделать на примерах нескольких существующих озер.

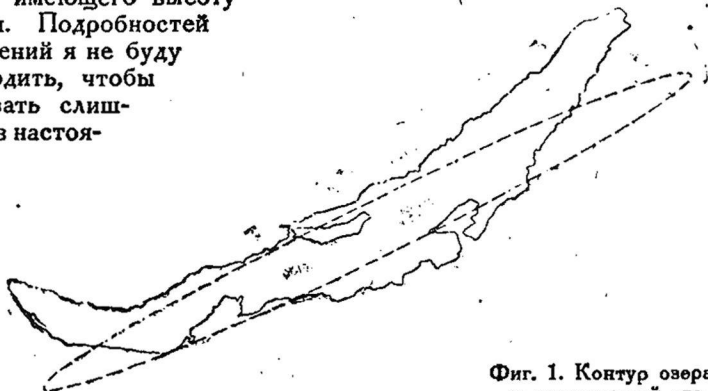
§ 6. Байкал

При вычислениях неправильная форма озера должна быть заменена половиной эллипсоида. Конечно, при такой замене не может быть точного совпадения действительных и предполагаемых размеров для всего озера; путем многократных проб найдено, что наиболее удовлетворительное совпадение получается, если взять длину $2b = 660$ км, ширину в средней части $2a = 50$ км и наибольшую глубину $c = 1700$ м.

Приняв эти величины осей, можно из уравнения эллипсоида вычислить предполагаемую ширину и глубину в любом месте озера; получается, что на северном конце его действительная ширина будет больше вычисленной, действительные глубины будут больше вычисленных для южного конца и меньше — для северного.

Для вычислений еще нужно знать T_0 и γ . Измерения температуры воды у дна, произведенные Байкальской станцией Академии Наук, показывают, что с точностью до нескольких десятых градуса можно принять $T_0 = 3^\circ \text{C}$. Что касается величины градиента γ , то ее следовало бы определить из геотермических измерений в районе Байкала, но так как таковых, к сожалению, не имеется, то при вычислениях придется взять возможную среднюю величину этого градиента $\gamma = 30^\circ$ на километр, причем нужно оговориться, что такое принятие средней величины вместо неизвестной действительной должно повести к некоторому расхождению вычисленных и фактически существующих температур. Горы, находящиеся в окрестностях озера, могут также быть причиной такого расхождения.

Чтобы выяснить, насколько велика эта возможность для Байкала, мною были произведены вычисления по формулам Лиса [4] изменения величины геотермического градиента у озера, вызываемого влиянием горного кряжа, находящегося в южной части Байкала на восток от него на расстоянии 10 км от берега и имеющего высоту около 2 км. Подробностей этих вычислений я не буду здесь приводить, чтобы не увеличивать слишком размеров настоя-



Фиг. 1. Контур озера Байкала и заменяющий его эллипс

щей статьи, и только сообщу их результаты. Получилось, что под влиянием гор увеличение градиента у берега Байкала будет равно $0,06^\circ\text{C}$ на 100 м около дневной поверхности и $0,04^\circ\text{C}$ на 100 м на глубине 2 км. Такие малые величины неуволимы при геотермических измерениях, и потому можно считать, что рассматриваемый горный кряж не оказывает влияния на распределение температуры вблизи и под Байкалом.

Байкал очень длинное озеро; посмотрим, насколько возможно для него при вычислении температур заменять формулу (1) более простой формулой (7).

Для Байкала нами принято $c=1,7$ км, $b=330$ км. Получаем $\left(\frac{c}{b}\right)^2=0,00003$.

Найдем, для какого значения v величина $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{c^2}{b^2}v}}$ отличается от единицы

на 0,01; для этого положим $\frac{1}{\sqrt{1+0,00003v}}=0,99$; возведя это уравнение в квадрат и решая затем относительно v , найдем $v=678$. Для этого значения v ,

в интеграле (5) величина подинтегральной функции равна 0,00005; изменение ее на 1% не может оказать заметного влияния на результат приближенного вычисления интеграла (для приложений этот интеграл достаточно вычислять с тремя-четырьмя десятичными знаками), поэтому отбрасывание множителя

$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{c^2}{b^2}v}}$ вполне допустимо, и для вычисления температур вокруг Байкала

можно пользоваться формулой (7). Подставляя в нее принятые нами величины полуосей эллипсоида, получим

$$u=3^\circ+\gamma z \left[1-0,073 \left(\sqrt{\frac{216,09+\frac{\lambda}{c^2}}{1+\frac{\lambda}{c^2}}}-1 \right) \right], \quad (11)$$

где λ , как всегда, определяется из уравнения (2).

Под центральной частью озера при $x=y=0$ из уравнения (2) находим $\frac{\lambda}{c^2} = \left(\frac{z}{c}\right)^2 - 1$; для любой глубины z (большей c) из этого равенства получаем $\frac{\lambda}{c^2}$ и затем по формуле (11) вычисляем температуру на этой глубине. Результаты таких вычислений, сделанных при предположении $\gamma = 30^\circ \text{C}$ на километр, приведены в табл. 1; там же помещены: разница между температурой вдали от озера, вычисленной по формуле $u = T_0 + \gamma z$, и температурой под ним на той же глубине и числа, показывающие, на сколько метров геоизотермы, проходящие на данных глубинах под озером, опустились от своего нормального положения.

Таблица 1

z — глубина от поверхности, м	1700	3400	5100	6800	8500	17 000
Т-ра под озером на глубине z , $^\circ\text{C}$	3,0	57,4	111,5	165,8	218,5	484,4
Разница т-р вдали от озера и под ним на одной глубине, $^\circ\text{C}$	51,0	47,6	44,5	41,2	39,5	28,6
Опускание геоизотерм, м	1700	1587	1483	1373	1317	973

Числа, приведенные в этой таблице, показывают, что охлаждающее влияние Байкала должно распространяться в глубину на очень большое расстояние, — даже для глубины 17 км опускание геоизотерм получилось почти равным километру. Распространять эти вычисления на еще большие глубины не представляет смысла, так как физические условия, существующие на этих глубинах, несомненно отличаются от таковых для верхних слоев земной коры, и сделанное нами допущение о постоянстве теплопроводности и геотермического градиента не будет для них справедливо. Даже на глубины 17 км вычисленные температуры следует рассматривать не как действительно существующие, а скорее лишь как указание на то, что и на этой глубине охлаждающее влияние озера должно еще сильно сказываться, хотя изменившиеся физические условия и могут повести к несколько иным температурам как под самым озером, так и вдали от него.

Представляет интерес также проследить, как распространяется охлаждение, вызываемое озером, в горизонтальном направлении в сторону от него. Для этой цели вычислено, какие температуры должны быть в вертикальных скважинах, находящихся на разных расстояниях от Байкала. Все скважины взяты в средней части озера на линии $y=0$; первая на самом берегу его в точке $x=a$ (табл. 2), вторая — на расстоянии 2,5 км от берега в точке $x=1,1a$ (табл. 3) и третья — на расстоянии 12,5 км от берега в точке $x=1,5a$ (табл. 4). Подставляя в уравнение (2) $y=0$ и данное значение x , получим для каждой скважины уравнение второй степени относительно $\frac{\lambda}{c^2}$, положительный корень которого дает для различных глубин значение $\frac{\lambda}{c^2}$; найдя его по формуле (11) вычисляем температуру в скважине на этой глубине.

В табл. 2, 3 и 4 дана, кроме вычисленной температуры в скважине на разных глубинах, также разность температур вдали от озера и в скважине на одной глубине и величины геотермических ступеней, вычисленные, как это обычно делают, от поверхности до данной глубины.

Таблица 2

Скважина на берегу в точке $x=a, y=0$

Глубина, м	170	340	510	1020	1700	2550	3400
Т-ра, °С	4,6	7,0	12,0	24,9	43,4	67,0	91,6
Разница т-р далеко от озера и в скважине на одной глубине, °С	3,5	6,2	6,3	8,8	10,6	12,5	13,4
Ступень, м на 1°С	106,2	85,0	56,7	46,8	42,1	39,8	38,4

Из этой таблицы видно, что холодная вода озера вызывает в прилегающих участках земной коры увеличение геотермической ступени (по сравнению с принятой в этих вычислениях за нормальную 33,3 м на 1°С), особенно сильно вблизи земной поверхности и постепенно убывающее с глубиной. Это убывание ступени с глубиной показывает, что температурная кривая для скважин на берегу водных бассейнов должна быть выпуклой относительно оси глубин.

Таблица 3

Скважина на расстоянии 2,5 км от берега в точке $x=1,1a, y=0$

Глубина, м	170	340	850	1700	2550	3400
Т-ра, °С	7,5	12,1	25,8	49,3	72,5	96,0
Разница т-р далеко от озера и в скважине на одной глубине, °С	0,6	1,1	2,7	4,7	7,0	9,0
Ступень, м на 1°С	37,8	37,4	37,3	36,7	36,7	35,5

В этой скважине охлаждающее влияние озера значительно слабее, чем в скважине на самом берегу его, хотя и вызывает изменения того же характера: понижение температуры по сравнению с температурой на большом удалении от озера, причем разница между этими температурами увеличивается с глубиной, и увеличение ступени, с глубиной постепенно ослабевающее.

Таблица 4

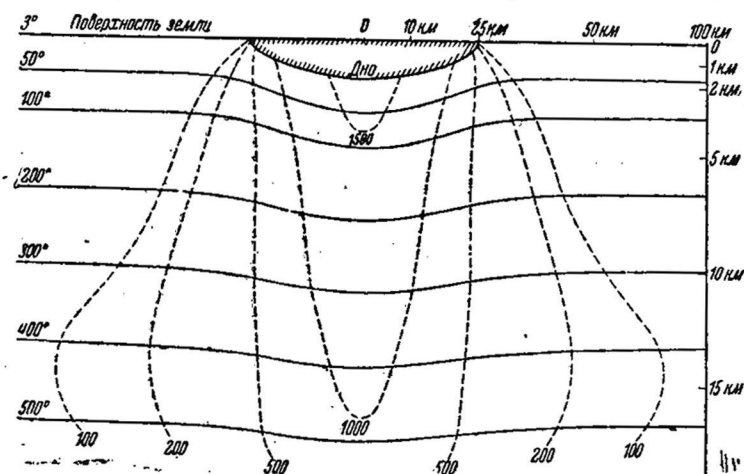
Скважина на расстоянии 12,5 км от берега в точке $x=1,5a, y=0$

Глубина, м	170	850	1700	3400
Т-ра, °С	7,9	27,5	52,6	102,2
Разница т-р далеко от озера и в скважине на одной глубине, °С	0,2	1,0	1,4	2,8
Ступень, м на 1°С	34,7	34,7	34,3	34,2

В последней скважине охлаждающее действие озера уже мало заметно и вызывает увеличение ступени только на один метр.

Приведенные в таблицах 2, 3 и 4 величины геотермических ступеней позволяют судить, насколько возможно объяснять наблюдаемые иногда большие ступени наличием вблизи мест наблюдения крупных водных бассейнов. Оказывается, это можно делать только для скважин, находящихся очень близко от воды.

Общая картина расположения изотерм под Байкалом для поперечного сечения его в средней части, построенная по вычислениям, представлена на фиг. 2.



Фиг. 2. Пунктиром обведены области, внутри которых опускание изотерм больше 1500, 1000, 500, 200 и 100 м

Обращаемся теперь к вычислению теплового потока, входящего в воду со дна Байкала. По формуле (9) под центральной частью озера в точке $x = y = 0, z = c, \frac{du}{dn} = \frac{4}{Z_0} \lambda$, а по формуле (6) $Z_0 = \frac{4}{1 + \frac{c}{a}}$; для Байкала получим

$$\left(\frac{du}{dn}\right)_{\max} = \left(1 + \frac{c}{a}\right) \gamma = 1,07 \gamma, \quad (12)$$

— тепловой поток, входящий в воду, равен $k \frac{du}{dn} = 1,07 k \gamma$.

В земной коре вдали от озера, где влияние его уже не сказывается, тепловой поток равен $k \gamma$, следовательно поток, входящий в воду под центральной частью Байкала, составляет 107% теплового потока, проходящего в земной коре далеко от озера. Чтобы получить численную величину этого потока в калориях, необходимо знать теплопроводность пород, подстилающих Байкал, и точную величину градиента γ , полученную из геотермических измерений в районе озера. При предположении $\gamma = 30^\circ$ на 1 км или $\gamma = 3^\circ \cdot 10^{-4}$ на один сантиметр и $k = 0,005$ (приблизительная теплопроводность гранитов и гнейсов), получим нормальный поток $k \gamma = 15 \cdot 10^{-7}$ кал на 1 см² в секунду; увеличенный поток на дне Байкала в тех же единицах будет равен $1,07 k \gamma = 16 \cdot 10^{-7}$ кал. Такой поток вполне достаточен для объяснения небольшого придонного повышения температуры, наблюдаемого на Байкале: если бы вода была абсолютно неподвижна и передача тепла производилась только исключительно путем теплопроводности, то, принимая теплопроводность воды $k_1 = 0,001$, мы получили бы температурный градиент в ней равным $\frac{16 \cdot 10^{-7}}{k_1} = 16 \cdot 10^{-4}$ на 1 см или $0,16^\circ \text{C}$ на 1 м.

Найдем, для каких глубин тепловой поток, входящий в воду, равен $k \gamma$ — тепловому потоку в земной коре. Для поперечного сечения озера плоскостью $y = 0$ глубина эта z_a найдется как точка пересечения эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

с парой образующих конуса (10), лежащих в плоскости $y=0$,

$$\frac{x^2}{a^4} - \frac{z^2}{c^4} \left(\frac{16}{Z_0^2} - 1 \right) = 0.$$

Исключая из этих двух уравнений x , получим

$$z_a = \frac{c}{\sqrt{\frac{a^2}{c^2} \left(\frac{16}{Z_0^2} - 1 \right) + 1}}. \quad (13)$$

Для Байкала $\frac{a^2}{c^2} = 216,0900$; $\frac{16}{Z_0^2} = \left(1 + \frac{c}{a} \right)^2 = 1,1406$, $c = 1700$ м. Подставляя эти числа в формулу (13), найдем $z_a = 0,178c = 302$ м.

Проделав такие же вычисления для продольного сечения озера плоскостью $x=0$, получим

$$z_b = \frac{c}{\sqrt{\frac{b^2}{c^2} \left(\frac{16}{Z_0^2} - 1 \right) + 1}} = 0,013c = 22 \text{ м.}$$

Полученные величины z_a и z_b показывают, что в средней части Байкала, начиная с глубины 302 м, тепловой поток, входящий в воду, будет больше нормального теплового потока в земной коре; для концов озера эта глубина уменьшается до 22 м*. Отсюда делаем вывод, что громадные площади дна Байкала нагреваются снизу стационарным тепловым потоком, который немного больше потока, проходящего в земной коре вдали от озера.

На дне водного бассейна в точке $x=y=0$, $z=c$ направление нормали совпадает с направлением оси z , и потому для нее $\frac{du}{dn} = \frac{du}{dz}$. Градиент γ' в этой точке для Байкала по формуле (12) получается $\gamma' = 1,07\gamma$. Определяя геотермическую ступень как обратную величину градиента, найдем ступень g' в этой точке

$$g' = \frac{1}{1,07\gamma} = 0,93g, \quad (14)$$

где $g = \frac{1}{\gamma}$ — нормальная величина геотермической ступени. Принимая $\gamma = 30^\circ \text{C}$ на километр, получим $g = 33,3$ м на 1°C и по формуле (14) $g' = 31,0$ м на 1°C , что находится в полном согласии с существующим мнением, что под дном водных бассейнов геотермическая ступень должна быть уменьшена.

§ 7. Танганьика

Африканское озеро Танганьика по размерам своим близко подходит к Байкалу. Для вычислений, при замене его действительного контура эллипсом, следует взять $2b = 650$ км, $2a = 50$ км. Озеро это значительно глубже на концах, чем в середине, поэтому его нельзя заменить половиной эллипсоида так, чтобы вычисленные и действительные глубины хотя бы приблизительно совпали. Для приближенного подсчета увеличения градиента под дном его произведем вычисления два раза: первый раз положим $c = 800$ м действительной глубине в середине озера (при этом вычисленные глубины на концах его получаются приблизительно в два раза меньше действительных), второй раз возьмем $c = 1600$ м, что дает приблизительное совпадение вычисленных и действительных глубин на половине расстояния между центром

* Последнюю цифру нельзя считать особенно надежной, так как на глубине 22 м сильно сказываются годовые колебания температуры, которые в настоящей работе во внимание не принимаются.

озера и его концом. При таких вычислениях для каждого случая получим различные величины увеличения градиента на дне, истинное увеличение его для разных мест озера будет находиться между этими двумя величинами.

1) $c=800$ м. По формулам (9) и (6) под центральной частью озера в точке $x=y=0$, $z=c$ получим

$$\frac{du}{dz} = \left(\frac{du}{dn} \right)_{\max} = \left(1 + \frac{c}{a} \right) \gamma = \left(1 + \frac{800}{25000} \right) \gamma = 1,03 \gamma.$$

2) $c=1600$ м. В этом случае градиент следует вычислить не для центральной части дна, а для того места, где получается удовлетворительное совпадение вычисленных и действительных глубин, т. е. для точки $x=0$, $y=\frac{1}{2}b$. По формулам § 4 для градиента на дне получаем выражение

$$\left(\frac{du}{dz} \right)_{x=0} = \frac{4}{Z_0} \gamma \frac{\frac{z^2}{c^2}}{\frac{x^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{c^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}.$$

По формуле (6) $\frac{4}{Z_0} = 1 + \frac{c}{a}$. При $a=25$ км, $b=325$ км, $c=1,6$ км, $x=0$, $\frac{y}{b} = \frac{1}{2}$, $\frac{z}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ получим

$$\frac{du}{dz} = \left(1 + \frac{1,6}{25} \right) \gamma \cdot \frac{3}{3,00003} = 1,06 \gamma.$$

В этой точке направление нормали не совпадает с вертикальным направлением и, строго говоря, $\frac{du}{dz} \neq \frac{du}{dn}$; для $\frac{du}{dn}$ по формуле (8) найдем

$$\frac{du}{dn} = \left(1 + \frac{1,6}{25} \right) \gamma \sqrt{\frac{3}{3,00003}} = 1,06 \gamma,$$

т. е. в пределах точности наших вычислений $\frac{du}{dz}$ и $\frac{du}{dn}$ получаются равными.

Сопоставляя все приведенные вычисления, делаем заключение, что увеличение градиента под дном Танганьики, а также и увеличение теплового потока, входящего в воду, будет составлять от 3 до 6% его нормальной величины.

§ 8. Озеро Chelan (США, штат Вашингтон)

По имеющимся у меня скудным сведениям об этом озере [5] под ним можно ожидать особенно большое увеличение теплового потока. Длина озера 76 км, средняя ширина приблизительно около 2 км, при максимальной ширине в 6,4 км. Наибольшая глубина 458 м находится около центра в узком месте озера. По этим только данным, не имея карты глубин, невозможно произвести более или менее точные расчеты, но все же интересно хотя бы приблизительно подсчитать, какое увеличение потока можно ожидать под озером. Ширина озера в его наиболее глубоком месте мне неизвестна, но так как имеется указание, что это место узкое, то, повидимому, ширина его не больше 2 км — средней ширины озера.

Возьмем $c=458$ м, $2a=2000$ м; тогда по формулам (9) и (6)

$$\left(\frac{du}{dn} \right)_{\max} = \left(1 + \frac{c}{a} \right) \gamma = 1,458 \gamma.$$

Получилось, что увеличение теплового потока под наиболее глубоким местом озера Chelan может достигать около 46% его нормальной величины. В более мелком и широком месте озера увеличение теплового потока получится меньше. Для примера возьмем $c=400$ м. и $2a=6000$ м; по тем же формулам получим

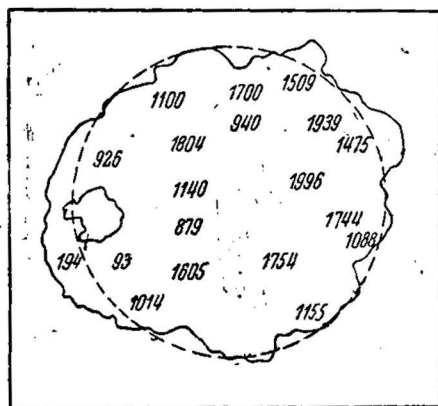
$$\frac{du}{dn} = \left(1 + \frac{c}{a}\right) \gamma = 1,13 \gamma,$$

т. е. поток увеличится только на 13%. Но даже и это увеличение теплового потока на 13% будет еще довольно большим, так как оно вдвое превышает вычисленные нами в §§ 6 и 7 увеличения потоков под Байкалом и Танганьикой.

Хотя при приложениях развитой в этой работе теории к реальным водным бассейнам последние нужно заменять целиком одной половиной эллипсоида, а не подбирать подходящие величины осей этого эллипсоида отдельно для разных мест, как это сделано выше, все же можно считать установленным, что в более узких и глубоких местах бассейна тепловой поток на дне его будет больше теплового потока в местах широких и мелких. Измерения температуры воды в озере Chelan до некоторой степени подтверждают этот вывод. Температура воды у дна на глубине 458 м равна $5,9^{\circ}\text{C}$, тогда как измерения в менее глубоком (440 м) месте озера (но повидимому более широком) дают температуру у дна 4°C . Весьма вероятно, что это различие придонных температур вызывается именно разницей тепловых потоков, входящих в воду в местах наблюдений.

§ 9. Crater Lake

В качестве примера круглого озера возьмем Crater Lake (США, штат Орегон). Озеро это имеет в среднем диаметр $2a=8$ км и максимальную глубину 608 м. Примем при вычислениях $a=4000$ м, $c=600$ м.



Фиг. 3. Контур Crater Lake (глубина в англ. ф., масштаб 1:140 000). Проведенная пунктиром окружность заменяет истинный контур озера при вычислениях

Для отношений осей $\frac{a}{c} = \frac{4000}{600} = 6,6$, по формуле (4) найдем $Z_0 = 3,210$, затем по формуле (9) получаем

$$\left(\frac{du}{dn}\right)_{\max} = \frac{4}{Z_0} \gamma = 1,25 \gamma.$$

Следовательно, тепловой поток, входящий в воду под центральной частью озера, подобного Crater Lake, будет на 25% больше нормального теплового потока в земной коре. Любопытно отметить, что вообще при одной и той же ширине и глубине тепловой поток под круглым озером будет больше такового под озером вытянутым. Так, например, для очень длинного озера при $a = 4000$ м и $c = 600$ м, по формулам (6) и (9) получим $\left(\frac{du}{dn}\right)_{\max} = \left(1 + \frac{c}{a}\right)\gamma = 1,15\%$, т. е. при том же отношении $\frac{a}{c}$, как для Crater Lake, тепловой поток увеличится только на 15%.

По формулам (8) и (9) вычисляется увеличение теплового потока под озером, вызываемое только лишь его охлаждающим действием. Crater Lake находится в кратере потухшего вулкана, в недрах которого быть может еще сохранились остатки его первоначального тепла; в таком случае увеличение теплового потока под озером, против его нормальной величины в земной коре, может оказаться больше вычисленного нами. С другой стороны, это озеро расположено высоко в горах (1883 м над уровнем моря), а тепловой поток под горами должен быть уменьшен по сравнению с потоком под долинами.

С увеличением $\frac{a}{c}$ Z_0 увеличивается, приближаясь к 4, а $\left(\frac{du}{dn}\right)_{\max} = \frac{4}{Z_0}\gamma$ уменьшается, приближаясь к γ . Следовательно, чем больше глубина озера по сравнению с его шириной (т. е. чем меньше их отношение $\frac{a}{c}$), тем больший тепловой поток входит в воду со дна. Crater Lake является одним из таких относительно наиболее глубоких озер и притом круглой формы, благоприятствующей увеличению теплового потока, поэтому можно думать, что увеличение нормального теплового потока на 25% близко к максимальному увеличению его для существующих на Земле озер*. Сказанное относится только к увеличению потока, вызываемому присутствием холодной воды озера. Если озеро окружено высокими горами (а в ложбине между двумя горными кряжами геотермический градиент должен быть увеличен), то увеличение теплового потока под ним будет значительно больше и в некоторых случаях влияние гор на это увеличение может даже превысить влияние самого озера.

Байкальская лимнологическая станция
Академии Наук СССР

Получено
23.XII.1936

ЛИТЕРАТУРА

1. Вернадский В. И., Об областях охлаждения в земной коре. Записки Гос. гидр. инст., т. X, 1933.
2. Koenigsberger J. und Muhlberg, Ueber Messungen der gethermischen Tiefenstiefe, deren Technik... N. Jahre f. Miner. Geol. und Pal., Bd. XXXI, 1911.
3. Riemann-Weber, Die partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik, Bd. 1, 1900.
4. Lees Ch. H., On the shapes of the isogeothermes under mountain ranges in radio-active districts, Proc. Roy. Soc., London, 1910.
5. Kemmerer G., Bovard J. F. and Boorman W. R., North-western lakes of the United States: biological and chemical studies with reference to possibilities in production of fish, Bulletin of the Bureau of Fisheries, vol. XXXIX, 1923—1924.

* Вычисленное в § 8 возможное максимальное увеличение потока на 46% для озера Chelan нельзя считать особенно надежным и близким к действительности из-за недостаточности сведений об этом озере, в силу чего все вычисления § 8 носят только ориентировочный характер.

N. KORYTNIKOVA. THE INFLUENCE OF THE WATER BASINS ON THE THERMAL CONDITIONS OF THE NEIGHBOURING PARTS OF THE EARTH CRUST

SUMMARY

The purpose of this work is to investigate how much the normal thermal conditions in the Earth crust must be disturbed near the water basins.

The mathematical solution of the problem concerning the distribution of temperature around the water basin is given by the formula (1) at the following assumptions:

- a) the distribution of temperature does not depend on time,
- b) the surface of the Earth is flat and has a depression in form of a half of ellipsoid filled with water,
- c) at a sufficiently great distance from the water basin, where its influence already cannot be detected, the geothermal gradient is constant,
- d) the Earth surface and the bottom of the water basin are at a constant temperature.

The formula (8) shows that the stream of heat, entering the water from the bottom under the central part of the water basin, is always somewhat greater than the normal heat current in the earth crust. This increase of the stream of heat does not depend on the absolute dimension of the basin but on its form and the relief of the bottom, and is the more considerable, the greater is the ratio of the basin depth to its width and length. It is calculated that for Baikal the stream of heat entering the water under the central part of the lake must be 7% greater than the normal current of heat in the Earth crust. For Tanganyika the area and the depth of which are approaching to those of Baikal this increase is from 3% to 6%. A much greater increase of the stream of heat up to 25% of its normal value is obtained for the Crater Lake (USA, Or.) and still greater increase apparently may be expected under the deepest places of Chelan Lake (USA, Wash.).

The cooling caused by the cold water of the lake in the adjacent parts of the earth crust is considered in detail for Baikal, this cooling being much stronger and penetrating deeper vertically under the bottom of the lake than horizontally in its sides.

The table 1 contains the calculated temperatures and the values of cooling in degrees C for different depths under the lake, as well as the numbers showing how much the geoisotherms passing in the given depths under the lake sank from their normal position; it occurs that even in the depth equal 17 km this sinking is almost equal to a kilometer. The tables 2—4 contain temperatures, cooling and the values of reciprocal gradients in the imagined bore wells at different distances from the shore of the lake. These tables show that a great increase of the reciprocal gradient may be expected only near the very shore and only for small depths.