

С. В. ЧИБИСОВ

О ВРЕМЕНИ ПРОБЕГА ЗВУКОВОГО ЛУЧА В АТМОСФЕРЕ

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом)

В работе сделана попытка дать теоретические основы звукометрического метода изучения состояния атмосферы, характеризуемой температурным и ветровым полем. Многочисленные наблюдения над аномальным распространением звука в атмосфере привели ряд исследователей к допущению, что звуковой луч, выходя из источника на земной поверхности, описывает криволинейную траекторию в атмосфере и при определенном ее состоянии вновь возвращается на земную поверхность. В работе изучаются зоны слышимости и зоны молчания, образованные конгруэнцией звуковых лучей точечного источника на земной поверхности, а также источника, расположенного на некоторой высоте, в предположении непрерывного и разрывного слоистого состояния атмосферы. При изучении распределения конгруэнции лучей и образования ими зон слышимости исследуется распределение времени пробега звуковых лучей при помощи семейства изохрон, годографов различных азимутов и их геометрического места — поверхности годографов. Свойства последней положены в основу решения обратной задачи — изучения распределения по высоте температуры и ветровых составляющих по заданному непосредственными наблюдениями распределению времени пробега звука в зонах слышимости.

ВВЕДЕНИЕ

Начало изучению распространения звуковых волн в атмосфере положили наблюдения Борне над слышимостью звука при взрыве в Фёрде в Вестфалии в 1903 г. [1]* и в Виттен-Аннене в 1906 г. [2]. Борне обнаружил, что по мере удаления от источника взрыва в каком-нибудь направлении слышимость понижается, что естественно было ожидать, так что на расстоянии приблизительно в 50 км при мощных взрывах (15 т динамита при взрыве в Фёрде) наблюдатель уже более не обнаруживает звукового импульса; однако начиная со 100 км удаления от источника вновь появляется резкая слышимость, которая понижается по мере дальнейшего удаления и, простираясь до 200 км, опять затухает. Отмечалась в некоторых местах двукратная слышимость с интервалом от 1 до 5 секунд. Таким образом, на земной поверхности обнаруживается вообще несимметричная область слышимости, отделенная от естественной области вблизи источника областью затишья. Эту последнюю Борне назвал зоной молчания, а область слышимости, лежащую за зоной молчания, аномальной зоной, в отличие от нормальной зоны, охватывающей источник. Подобное наблюдал де-Кервен при взрыве по дороге на Юнгфрау в 1908 г. [3]. Де-Кервен установил одностороннее простираение нормальной зоны на 60—70 км и иным образом ориентированную аномальную зону на расстоянии 140—200 км, лежащую в секторе около 90° с центром в источнике.

Анализ метеорологического состояния атмосферы в момент взрыва в Швейцарии привел де-Кервена к обнаружению температурной инверсии, которой

* Список литературы см. в конце работы.

он пытался объяснить образование аномальной зоны слышимости. Борне в 1910 г. [4] сделал попытку объяснить образование аномальной слышимости гипотезой о водородной атмосфере. Допуская увеличение содержания водорода с высотой, а следовательно тем самым и увеличение скорости распространения звука, Борне оценил границу зоны аномальной слышимости в 114 км. Эта гипотеза, так же как и гипотеза Вегенера [5] о водородной атмосфере с примесью гипотетического газа геокорония, позднее подвергшиеся критике со стороны Эвердингена [6], Кёльцера [7, 8], Шмидта [9], Бендорфа [10] и др., могут быть в настоящее время оставлены. Недостаток наблюдений не позволял дать удовлетворительного объяснения явления.

Существенный пробел в наблюдениях и в попытках объяснить образование зон слышимости восполнил Фудживара в двух работах 1912 и 1916 гг. [11]. Он располагал большим материалом наблюдений над звуковыми явлениями, сопровождавшими извержения вулкана Азама в период его интенсивной деятельности с 7.II.1909 по 22.II.1912, — около 40 карт распределения слышимости на островах и частично на материке. Далее, он вновь подверг обработке карты распределения слышимости (20 наиболее показательных) в деятельности того же вулкана за период с 14.II.1912 по 6.XI.1913. Присоединив к этому материалу наблюдения над взрывами артиллерийских складов в Кобе, а также наблюдения над слышимостью мощной звуковой волны при извержении вулкана Бандаи 15.VII.1888, Фудживара получил возможность проверить выводы теоретических соображений о распространении звука в подвижной атмосфере.

Сопоставляя карты распределения слышимости с синоптическими картами, Фудживара установил, что появление аномальных зон слышимости вызывается наличием встречных воздушных течений в верхних слоях атмосферы. Это дало ему путь для качественного суждения о состоянии атмосферы на основании распределения зон слышимости. Для количественного расчета он приблизительно решает задачу о распространении малого возмущения (u , v , w и их производные — малые 1-го порядка) в сжимаемой среде при условиях: линейного убывания температуры, наличия ветра постоянного направления, параллельного земной поверхности, и малого градиента по высоте. В качестве промежуточного результата для скорости звука в подвижной среде устанавливается закон геометрического сложения скоростей переносного (ветер) и относительного (скорость звука в спокойной среде) движений. Рассчитывая энергию звукового потока, Фудживара приходит к уравнениям звукового луча, которыми определяются: высота подъема луча, время пробега, средняя скорость звука, границы зон слышимости и т. д. Определяя из наблюдений градиент ветра и отрицательный градиент скорости звука в спокойной атмосфере, он сверяет результаты расчета с наблюдениями и обнаруживает их достаточную близость*. Он находит также объяснение возникновения многократной слышимости наличием разрыва в распределении скорости ветра по высоте. В качестве принципиального вывода Фудживара следует отметить, что в особенностях распространения звука в атмосфере основную роль играет изменение скорости ветра с высотой. Во второй работе (1916) он вновь подтверждает свои теоретические соображения результатами наблюдений над звуковыми явлениями, связанными с деятельностью вулкана Азама за период с 14.II.1912 по 6.XI.1913.

Работа Фудживара сильно продвинула вперед вопрос о распространении звуковых волн в атмосфере, но еще не поставила во весь рост проблемы о звукометрическом методе изучения состояния атмосферы. Фудживара следовал методу подбора постоянных в рамках его частных гипотез, связанных

* Подтверждение своих соображений Фудживара видит также в результатах наблюдений Дёрра [12] над распространением звуковых волн при взрыве в Винер-Неуштадте в 1912 г.

с распределением температуры и скорости ветра. Кроме того, предположение о малости градиента ветра несколько стесняет использование полученных им результатов, распространенных в дальнейшем другими авторами.

Первая империалистическая война доставила очень большой материал наблюдений над слышимостью канонады на западном фронте. Следует отметить наблюдения Мейнардуса [13] и наблюдения Голландского метеорологического института над слышимостью канонады при бомбардировке Антверпена 7—9.X.1915 [6]. Кольцевая зона молчания достаточно хорошо отмечалась в границах от 100 до 158 км: аномальная зона слышимости доходила до 200 км. Аналогичное распределение зон наблюдалось при канонаде на Ипре и в иных местах. Хагенбах [14], Вегенер [15], Людевиг [16], Хиллерс [17], Бранд [18] и др. наблюдали многократность звука и пытались установить зависимость слышимости и дальности ее от времени наблюдения. Однако этот материал носил случайный характер и при многих гипотезах, высказывавшихся авторами, не мог быть использован для развития теории явления.

Допустив справедливым кинематический закон сложения скоростей для скорости звука в подвижной атмосфере и закон преломления оптического или сейсмического луча для подвижной среды, Эмден [19] получил уравнения звукового луча, совпадающие с уравнениями Фудживара [11] в предположениях почти тех же, что у последнего, т. е. что скорость звука в спокойной среде и скорость ветра, параллельная земной поверхности и постоянного направления, произвольно распределяются по высоте. Эмден специально рассматривает простейшие распределения по высоте температуры, а следовательно и скорости звука в спокойной среде, принимая для скорости звука закон Лапласа, а также линейное распределение ветра с различными градиентами в различных слоях, на которые разбивает атмосферу, и в этих частных предположениях строит ход лучей, объясняя на примерах случаи образования зон молчания и аномальной слышимости. Таким образом, подбором различных параметров распределения температуры и ветра становится возможным с достаточной степенью точности объяснить особенности распространения звуковых волн в атмосфере.

Эмден еще не поставил проблемы изучения атмосферного состояния звукометрическими наблюдениями и ограничился качественным суждением. Совершенно очевидно, что для того, чтобы использовать образование зон аномальной слышимости в задаче изучения состояния атмосферы, т. е. чтобы построить новый метод изучения состояния атмосферы, в котором звуковой луч зондировал бы атмосферу так же, как сейсмический луч зондирует земную кору, необходим точный учет времени пробега звукового луча или иных величин, связанных с временем пробега.

Ясно, что проблема звукометрии во многом аналогична методу сейсмометрии, но осложняется тем, что атмосфера представляет подвижную среду. Эта аналогия с сейсмометрией вызвала большой интерес у некоторых сейсмологов и не замедлила сказаться в появлении ряда работ Вихерта [20—23], Гутенберга [24—28] и др.

В этих работах Вихерт шел по пути подбора параметров частных законов распределения температуры, проверяя предположения наблюдениями углов падения звукового луча на земную поверхность. Что касается ветра, то Вихерт не отрицает влияния последнего, приводя результаты наблюдений над взрывами в Мунстерлагере 28.I.1927 и 2.II.1927, в Лякуртине 15.V.1924 и в Ютербоге 26.VI.1926. Разность средних скоростей распространения звука на одних и тех же расстояниях, но в противоположных направлениях явно говорит о наличии ветра в верхних слоях атмосферы. Однако приводимый Вихертом прием оценки средней скорости ветра по отклонению средних значений скорости звука в одинаковых и противоположных направ-

влениях от средних их арифметических для исключения влияния ветра — теоретически явно ошибочен.

Гутенберг в целом переносит метод обработки сейсмических наблюдений Вихерта-Херглота на данные звукометрических наблюдений над углами падения звуковых лучей, пренебрегая наличием ветра в атмосфере. Таким образом, из метода обработки наблюдений Гутенберга должны быть исключены все случаи асимметричного распределения зон молчания и аномальной слышимости, которые в наблюдениях имеют место достаточно часто. Становясь на такую точку зрения, немецкие сейсмологи видят основной и главной причиной образования зон слышимости рост температуры в слоях атмосферы от 30 до 40 км, обусловленный поглощением солнечной радиации слоем озона. Гипотеза о высоких температурах в верхних слоях атмосферы разделялась многими геофизиками. Этой гипотезы придерживались Линдеман и Добсон [29, 30] и Уиппл [31, 32] для объяснения явлений, связанных с падением метеоритов. Такая несколько односторонняя точка зрения — основную причину образования зон аномальной слышимости видеть в росте температуры — вызвала справедливую реакцию в работах Кельцера [8] и Мейссера [33].

Скорость перемещения пыли на высоте 30—35 км при извержении Кракатау в 1883 г. в восточном направлении, оцениваемая в 30—40 м/сек, наблюдения над движением светящихся (серебристых) облаков в верхних слоях атмосферы и, наконец, асимметрия в распределениях зон молчания и аномальной слышимости являются серьезными аргументами у Кельцера, требующими необходимости учета, наряду с температурой, также влияния ветра и притом, что нам кажется вполне основательным, учета изменения с высотой не только скорости ветра, но и его направления. К тому же заключению о господствующих на высоте 30—40 км ветрах пришел и Кальке [34].

Большой атмосферно-сейсмический материал был доставлен наблюдениями над искусственными взрывами, организованными специальной комиссией по исследованию свободной атмосферы в Германии за период 1923—1929 гг. В разное время года было произведено 346 отдельных взрывов, которые принимались сетью наблюдателей в 450 станциях частью по слуху, а частью инструментально. Этот материал, собранный Хергезеллем и Дукертом [35, 36], был частично обработан Ангенгейстером [37—39], Вихертом [23], Гутенбергом [28], Хергезеллем [40] и Дукертом [41, 42].

На основании как этих наблюдений, так и систематических четырехлетних (1927—1931) наблюдений с помощью самопишущих микрофонов над звуковыми явлениями от артиллерийской стрельбы в Англии, приводимых Уипплом [43], наблюдений над слышимостью выстрелов из орудий в восточной Ливийской пустыне, приводимых Флауером [44], а также наблюдений над отдельными взрывами в Ютербоге в 1923, 1924 и 1925 гг., Ордрufe в 1925 гг., Мунстерлагере в 1925 г., Графенвере в 1925 г., Лякуртине в 1924 г., Вержьяте и других местах, описанных многими авторами, можно дать следующую характеристику зон слышимостей, их границ и средних скоростей распространения звуковых волн.

Вокруг источника звуковой энергии образуется нормальная или внутренняя зона слышимости, простирающаяся в зависимости от наличия приборов, регистрирующих звуковую волну, или от наблюдений на слух в среднем на 50 км. При наличии ветра в нижних слоях зона может быть несимметричной и вытянутой в направлении ветра (например при взрывах в Фёрде, на Юнгфрау, при извержениях вулкана Азама и др.). Средняя скорость распространения звуковой волны во внутренней зоне колеблется в пределах 330—340 м/сек., т. е. вообще соответствует температуре на поверхности Земли. Лишь на небольших расстояниях (до 1 км) скорость превышает нормальную, соответствующую температуре на поверхности Земли, что может

быть объяснено большими скоростями ударных волн Римана, возникающих при детонации. На расстояниях в среднем 50—100 км слышимость звуковой волны, идущей вблизи земной поверхности, в силу затухания почти прекращается, что приводит к образованию зоны молчания. На больших удалениях — в среднем свыше 100 км — возникает резкая слышимость, простирающаяся до 200 км и дальше.

Таким образом, возникает кольцо, шириною в 100 км, аномальной или внешней зоны слышимости. Это кольцо с резкой внутренней границей может быть замкнутым, или разорванным, или лежащим в секторе с различными центральными углами. Например, при взрыве 3.V.1923 в Ютербоге этот угол $\alpha = 29^\circ$, при взрыве в Вержье $\alpha = 22^\circ$, при взрывах в Виттен-Аннене и Оппау $\alpha = 150^\circ$ в Винер-Неуштадте $\alpha = 180^\circ$. Отмечались случаи $\alpha > 180^\circ$ и, наоборот, очень узкие секторы внешней слышимости (при извержениях Азама). Вообще внешняя зона не перекрывается внутренней. Однако отмечались случаи частичного перекрытия (Дукерт) при крайнем удлинении внутренней зоны в определенном направлении. Суждение по поводу перекрытия зон во многом зависит от чувствительности приборов, регистрирующих звуковой импульс. В зависимости от времени года и места наблюдения удаление границ внешней зоны при одних и тех же средствах наблюдения может сильно колебаться, снижаясь в зимние месяцы до 100 км и увеличиваясь до 180—190 км в летнее время (Вегенер [45]).

Средняя скорость звука во внешней зоне обычно меньше средней скорости звука во внутренней зоне и колеблется в пределах 280—300 м/сек. Время пробега звука для одинаковых расстояний от источника, но в противоположных направлениях при несимметричных формах границ различно, разница иногда достигает 35 сек. (Ангенгейстер [39]).

Наблюдались случаи образования вторичных и следующих зон аномальной слышимости, лежащих за первой — внешней зоной и отделенных от последней областями молчания, например при взрывах в Ютербоге (1926), в Куммендорфе (1925), при извержениях Азама. Отмечались случаи сверхдальней слышимости в 500 км и выше, например обстрел Антверпена в 1914 г. был слышен в Тироле на расстоянии 700 км [17]. Возможно, что в этих случаях звуковые лучи, идущие из атмосферы, отражаются от земной поверхности и вновь повторяют траекторию. Наконец, следует отметить часто наблюдавшуюся кратность слышимости. Такова общая характеристика зон слышимости.

Если образование внутренней зоны обуславливается звуковыми лучами, стелющимися на земной поверхности, и дифракцией последних в атмосфере, то образование внешней зоны следует приписать звуковым лучам, глубоко проникающим в атмосферу, претерпевающим на высоте полное внутреннее отражение или простое отражение от границы какого-либо слоя (границы инверсии, границы облака) и вновь возвращающимся на земную поверхность. Если случится, что два различных луча с разным временем их пробега попадут в одну точку земной поверхности, то образуется двукратная слышимость. Причиной полного внутреннего отражения звукового луча на той или иной высоте атмосферы является, очевидно, ее физическое состояние, т. е. скорость и направление ветра, температура, давление, состав атмосферы на этой высоте и т. д.

В поисках объяснения физических причин образования описываемых звуковых явлений в атмосфере и истолкования физического состояния атмосферы по данным наблюдений над распространением звуковых импульсов многими авторами строились различные гипотезы. О некоторых из них было уже упомянуто выше (Борне, Фудживара, Эмден, Вихерт, Гутенберг, Кельцер). Мы не будем здесь давать обзора этих гипотез, во-первых, потому, что это выходит за пределы настоящей работы, во-вторых, потому, что, как нам

кажется, при настоящем состоянии этого вопроса делать это преждевременно, так как до сих пор мы не имеем еще надежных методов обработки наблюдений *.

Конечным результатом обработки наблюдений должно быть распределение вектора — скорости ветра и скаляра — скорости звука в спокойной атмосфере. Таким образом, дальнейшей физической расшифровке подлежит эта последняя функция, зависящая от состояния атмосферы.

Ближайшей целью должна быть поставлена задача отыскания надежных методов оценки влияния ветра и отделения ветровых составляющих от скорости звука в спокойной среде в их взаимном влиянии на образование зон слышимости.

Ставя себе целью в настоящей работе установить метод обработки звукометрических наблюдений, достаточный для получения искомых распределений в атмосфере вектора — скорости ветра и скорости звука в спокойной среде, мы пойдем по пути разрешения аналогичной задачи в сейсмометрии. Работами Гейгера, Зёприца и Вихерта в настоящее время установлены широко применяемые в телесеизмике, а также в сейсмическом методе разведки полезных ископаемых приемы интерпретации, основанные на некоторых свойствах зависимости между временем пробега сейсмического луча и эпицентральной расстоянием — зависимости, называемой годографом сейсмического луча. Естественно и в настоящей задаче, во многом аналогичной сейсмической, идти по пути построения звукового годографа. Однако благодаря подвижности среды, в которой распространяется возмущение, изучение распространения звуковых волн, а следовательно и построение звукового годографа необходимо вести в различных азимутах — направлениях от источника звукового импульса. Таким образом, строится геометрическое место звуковых годографов — поверхность времени пробега. Геометрические свойства этой поверхности мы положим в основу решения интересующей нас обратной задачи — отыскания распределения ветровых составляющих и скорости звука в спокойной среде по данному распределению на земной поверхности времени пробега звуковых лучей, иначе по известной поверхности времени пробега, если прямой задачей назвать, наоборот, построение названной поверхности по заданному распределению скорости ветра и звука.

В направлении теоретического разрешения прямой задачи, помимо указанных работ Фудживара и Эмдена, следует отметить работы Эсклангона [46, 47, 48] и наконец Гальбрена [49, 50]. Эсклангон в своих работах изучает распределение лучей и образование зон слышимости в частных предположениях состояния атмосферы (ср. Фудживара, Эмден): 1) линейного роста с высотой скорости ветра при сохранении постоянного направления и линейного убывания скорости звука, 2) квадратичного роста и убывания тех же функций. Для малых наклонов лучей при постоянных градиентах скоростей звука и ветра даются приближенные выражения координат возврата лучей и времени пробега с целью дальнейшего использования в задаче отыскания положения источника звука при учете метеорологического состояния. Кроме того, Эсклангон изучает влияние поверхностей разрыва (инверсий, границ облака и пр.), а также отражающих поверхностей (земля, водная поверхность) на распространение звуковых волн.

Работу Гальбрена можно рассматривать как подытоживающую работы предшествующих авторов. В основу вывода уравнений звукового луча Гальбрен положил теорию Адамара [51] распространения волн — поверхностей

* Краткие обзоры различных гипотез и их критику можно найти в следующих статьях: R. Emden [19], W. Schmidt [9], H. Benndorf [10], B. Gutenberg [28], O. Meisser [33], E. Wiechert [23], G. Angenheister [39], A. Wegener [5, 15], J. Kölzer [7], P. Duckert [42], E. v. Everdingen [6] и S. Fujiwhara [11]. Там же можно найти указатель довольно обширной литературы. В переведенной на русский язык брошюре П. Дуккерта [42] приведен достаточно полный указатель литературы по 1931 г.

разрыва гидродинамических элементов. Уравнением поверхности волны является уравнение характеристической поверхности для системы уравнений гидродинамики, а бихарактеристиками Адамара являются лучи — траектории распространения волн. Допуская в атмосфере установившееся распределение с высотой температуры, плотности, давления, горизонтальных составляющих скорости частиц и силы тяжести, также зависящей от высоты, Гальбрэн рассматривает распространение в такой среде другого состояния, налагая на последнее адиабатическое условие и требуя на поверхности раздела первого и второго состояния разрыва первых производных для компонент скорости частиц, давления и плотности. В качестве условий кинематической и динамической совместности Гальбрэн получает уравнение волны, которую отождествляет с фронтом звуковой волны, причем характеристиками уравнения волны являются звуковые лучи. Он исследует конгруэнцию звуковых лучей, образование фокальных поверхностей, изучает распространение волны, ее особенности вблизи с фокальной поверхностью. Наконец при точечном источнике возникновения волн, он изучает пересечение конгруэнции лучей плоскостью земной поверхности, что приводит к установлению зон слышимости и зон молчания. Классификацией зон и их границ Гальбрэн ограничивает изучение прямой задачи звукометрии.

Что касается работ по акустическому зондированию атмосферы в СССР, то из них следует отметить наблюдения над слышимостью взрыва в Москве 9.V.1920, собранные и обработанные Виткевичем [52], и опыты по акустическому зондированию в Арктике в течение II международного полярного года [53]. Наблюдения над слышимостью взрыва в Москве проводились на слух и показали существование кольцевой зоны аномальной слышимости, заключенной между концентрическими окружностями радиусов в 150 и 250 км. Нарушение симметричности зоны заметно мало. Наблюдения в Арктике велись звукозаписывающими аппаратами; было произведено 28 взрывов в разные времена года, показавших существование аномальных зон слышимости. Однако наблюдения эти до конца обработаны не были.

В целях установления метода обработки наблюдений над распространением звуковых волн в атмосфере, сводящегося теоретически к постановке и разрешению обратной задачи, мы описываем в первых трех главах настоящей работы уравнение движущейся волны, распределение конгруэнции звуковых лучей, вводим понятие поверхности времени пробега звуковых волн в атмосфере и описываем ее свойства. В четвертой главе разбирается обратная задача. Подобная задача в сейсмометрии разрешена [54] как для упругой сферы, так и для упругого полупространства, имеющих слоистое распределение упругих постоянных, а следовательно скоростей распространения продольных и поперечных волн. Для спокойной атмосферы при слоистом распределении температуры, плотности и давления ход звукового луча подобен ходу сейсмического луча, что отмечалось выше; следовательно для спокойной атмосферы обратная задача, сводящаяся к изучению распределения с высотой скорости распространения звуковой волны по времени ее пробега — иначе по звуковому годографу, разрешается одновременно с упомянутой задачей сейсмометрии. Это решение и было положено Гутенбергом [28] в основу его метода обработки звукометрических наблюдений. Наличие составляющих ветра значительно осложняет явление и создает затруднения в разрешении обратной задачи.

ГЛАВА ПЕРВАЯ

§ 1

Задача изучения распространения звука в реальной атмосфере вряд ли может быть теоретически поставлена ввиду чрезвычайной сложности динамических процессов, протекающих в реальной атмосфере. Поэтому необходимо

принять одну из схем, характеризующих физическое состояние атмосферы и распространяющегося в ней звука. Отвлекаясь во всем дальнейшем от вязкости воздуха, теплопроводности, радиации тепла, конденсации влаги, будем рассматривать атмосферу как идеальную, тяжелую, сжимаемую, физически однородную жидкость, т. е. как такую жидкость, свойства которой могут быть описаны системой следующих уравнений гидродинамики:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0, \quad (2)$$

$$F(\rho, p, T) = 0, \quad (3)$$

где u, v, w — слагающие скорости частицы жидкости, p — давление, ρ — плотность и T — температура. Все эти шесть величин u, v, w, p, ρ, T суть функции четырех переменных: времени t и координат x, y, z , отнесенных к связанной с Землей системе координат. За последнюю примем, например, следующую: ось x — по касательной к широтному кругу к востоку, ось y — по касательной к меридиану на юг и ось z — по вертикали вверх. X, Y, Z суть составляющие объемных сил, отнесенных к единице массы. Таковыми являются сила тяжести и инерциальная сила Кориолиса. В силу предположения о физической однородности атмосферы уравнение (3) состояния не меняется при переходе от точки к точке и может быть для воздуха написано в известной форме уравнения Клапейрона

$$p = \rho R T, \quad (4)$$

где R — газовая постоянная и T — абсолютная температура. Принимая последний закон, мы налагаем ограничение на изучаемую среду — сохранение физического состава атмосферы, что, конечно, справедливо лишь до определенных высот. Выбранная гипотеза о состоянии могла бы быть заменена иной, например, гипотезой о баротропности атмосферы. Выбор того или иного уравнения состояния скажется лишь в оценке скорости распространения возмущения в такой среде. Так как в дальнейшем мы не предполагаем изучать причины изменения скорости распространения, то следовательно вопрос об уравнении состояния атмосферы не является существенным. Во всем дальнейшем будем считать земную поверхность плоской.

Задачу изучения гидродинамического и температурного состояния атмосферы — циркуляции, инверсии и т. д. — ставит динамическая метеорология. Состояние атмосферы может быть описано системой уравнений (1), (2), (4) при известном распределении температурной функции T . Оставляя эту последнюю искомой, в динамической метеорологии присоединяют к системе (1), (2), (4) уравнения лучеиспускания и притока тепла, что в совокупности дает систему уравнений относительно искоемых u, v, w, p, ρ, T . Трудности учета тепловой радиации при составлении уравнения баланса энергии и притока тепла, а также большие затруднения, возникающие при решении всей системы, вынуждают развить иной путь опытного суждения о состоянии атмосферы — на основе обработки наблюдений над распространением звука в атмосфере, как мы описали выше.

Вопрос о поведении некоторого возмущения в атмосфере представляет собой задачу о распространении движения, вызванного возмущением в подвижной среде — атмосфере. Эта задача привела Гюгоньо [55, 56], а затем Адамара [51] к теории распространения волн.

Обозначим через S гиперповерхность с непрерывной кривизной в пространстве (x, y, z, t) , являющуюся границей, отделяющей возмущенное состояние среды от невозмущенного. Эта поверхность делит пространство на две области: I — возмущенную и II — невозмущенную. В этих областях гидродинамическое состояние описывается уравнениями системы (1), (2), (4), так что при переходе через поверхность S терпят разрыв или функции u, v, w, p, ρ или их производные того или иного порядка.

Гюгоньо, а затем Адамар показали, что поверхность раздела S не может быть произвольной поверхностью, а таковой является характеристическое многообразие

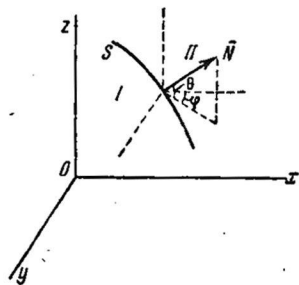
$$\Pi(x, y, z, t) = 0 \quad (5)$$

уравнений физического состояния среды, в нашем случае — системы уравнений (1), (2), (4). Таким образом, Гюгоньо установил чрезвычайно важный факт, что место разрывов функций состояния может быть не иначе как характеристическим многообразием.

Это находится, с другой стороны, в согласии с разрешением задачи Коши для системы уравнений гидродинамики. Если на некоторой поверхности S задать значения функций u, v, w, p, ρ и поставить задачу: отыскать в области, окружающей S , решение уравнений (1), (2), (4), т. е. однозначные и непрерывные функции, удовлетворяющие системе (1), (2), (4) и принимающие на S заданные значения, то оказывается, что S не может быть произвольной поверхностью. Если окажется, что S является характеристическим многообразием заданной системы уравнений, то решение задачи Коши существует, но оно будет не единственным, т. е. найдутся различные решения, которые принимают на S одни и те же значения, но у которых первые производные при переходе через S различны. К тому же результату мы придем, если потребуем решений однозначных, непрерывных, с такими же производными до определенного порядка.

Таким образом, по разные стороны от поверхности S , являющейся характеристическим многообразием, движение различно. Естественно принять движение по одну сторону от поверхности S в области I (фиг. 1) за возмущенное движение, а в области II за невозмущенное; из сказанного следует, что границей областей I и II пространства (x, y, z, t) оказывается характеристическое многообразие (5).

Назовем, следуя Адамару, поверхность (5) поверхностью разрыва первого порядка, или поверхностью сильного разрыва, если при переходе через нее функции u, v, w, p, ρ терпят разрыв непрерывности; далее, назовем ее поверхностью слабого разрыва второго, третьего и т. д. порядка, если на этой поверхности окажется разрывной по крайней мере одна из производных соответственно первого, второго и т. д. порядка функций u, v, w, p, ρ . Наконец, назовем поверхность (5) стационарной, если она, состоя из одних и тех же частиц, перемещается вместе с последними в заданной среде, и наоборот; назовем ее нестационарной, или волновой, если поверхность имеет собственную скорость перемещения и образующие ее частицы жидкости меняются.



Фиг. 1

Наблюдения над распространением звука в атмосфере дают указания на волновой характер возмущения, т. е. на нестационарность поверхности разрыва гидродинамических элементов, в связи с чем отпадает гипотеза о волновой поверхности как поверхности нулевого порядка, вследствие стационарности последней*. Ввиду больших расстояний распространения звуковой волны в атмосфере (150—200 км), малых скоростей частиц (ветер), господствующих в различных слоях атмосферы (не выше 50—60 м/сек), и наблюдаемой близости средних скоростей распространения звуковых волн к скорости звука в спокойной среде, можем исключить из дальнейшего рассмотрения гипотезу о волновой поверхности как поверхности сильного разрыва, образующейся при наличии очень больших скоростей, характерных для газовой динамики. Лишь вблизи мощных источников возмущения в виде взрывных очагов обнаруживаются специфические явления, например, значительное повышение скорости распространения возмущения, как было указано выше. Однако область, где эти явления имеют место, чрезвычайно мала (меньше 1 км) по сравнению с пространством распространения звуковой волны, так что естественно эту область исключить и принять в дальнейшем очаг возмущения за точечный источник или за заданное многообразие таких источников.

Заметим, что к тем же результатам относительно уравнения (5) мы приходим, если отождествим волновую (нестационарную) поверхность с поверхностью разрыва первого порядка в предположении малого возмущения, т. е. такого, в котором квадратами и произведениями слагающих смещения частиц при прохождении возмущения и их производными можно пренебречь**.

Итак, примем подвижную в атмосфере границу S , разделяющую возмущенное (I) состояние от невозмущенного (II), за поверхность разрыва по крайней мере второго порядка. Для изучения ее распространения, т. е. для изучения поведения характеристического многообразия (5), необходимо знать состояние только в невозмущенной области II, что выгодно отличает поверхность разрыва второго или высших порядков от поверхности разрыва первого порядка вне гипотезы о малости возмущений, где помимо знания состояния в невозмущенной области необходимо знать состояние после прохождения возмущающей волны***. Последнее обстоятельство вынуждает принять волну за поверхность разрыва не ниже второго порядка.

Примем следующие гипотезы относительно гидродинамического состояния в невозмущенной области II, т. е. в атмосфере до прохождения в ней звуковой волны. Допустим, что в атмосфере господствуют установившиеся воздушные течения, зависящие только от высоты, т. е. что составляющие скорости ветра u , v , w суть функции z , и кроме того температура T имеет высотное распределение $T(z)$. Эта гипотеза на небольшом сравнительно простирании земной поверхности подтверждается метеорологическими наблюдениями. Ввиду малости наблюдаемой скорости вертикальных токов сравнительно с горизонтальными течениями можно было бы принять с самого начала предположение, что $w \equiv 0$, как это делают Фудживара [11], Эмден [19], Вихерт [22], Гутенберг [28], Гальбрен [50]. Мы однако временно допустим распределение по высоте вертикального тока лишь в целях выяснения влияния его на поведение звукового луча и на условия возвращения его на земную поверхность при образовании зоны аномальной слышимости. Очевидно, что u , v , w , T должны вместе с неизвестным распределением давления p и плотности ρ удовлетворять системе (1), (2), (4), уравнению притока тепла, краевым и начальным условиям. Таким образом u , v , w , T являются вполне определенными функциями высоты.

* См. [57], стр. 261.

** См. [50], стр. 46—86.

*** См. [58], стр. 83—85.

Однако с гидродинамической точки зрения необходимо обосновать допустимость выбранного распределения элементов $u(z)$, $v(z)$, $w(z)$, $T(z)$, т. е. гидродинамическую осуществимость слоистого поля скоростей и температур. Иначе, необходимо обеспечить выполнимость условий динамической возможности уравнений (1), (2), (4) и уравнения притока энергии при выбранном распределении u , v , w , T . Пользуясь необходимыми и достаточными условиями для динамической возможности уравнений гидродинамики сжимаемой жидкости, установленными Фридманом*, и принимая за объемные силы X , Y , Z лишь силу тяжести, легко показать, что выбранное поле скоростей и температур является допустимым при условии $\frac{v'(z)}{u'(z)} = \text{const}$. В случае же $w(z) = 0$, особенно интересном для дальнейшего, т. е. при горизонтальном слоистом поле скоростей, условия динамической возможности осуществляются произвольным выбором $u(z)$, $v(z)$, $T(z)$. Из последнего однако отнюдь не следует, что такое поле возникнет при произвольном выборе начальных и краевых условий. Наблюдения показывают, что такие поля могут возникать, и отыскать их, пользуясь данными звукометрических наблюдений, и представляет нашу задачу.

Будем предполагать, что u , v , w , T — функции непрерывные с непрерывными производными до требуемого порядка. Случаи наличия поверхности разрыва u , v , w , T , например на границе облака, рассмотрим в дальнейшем отдельно. Наконец, примем естественную гипотезу об отсутствии притока тепла или об отсутствии теплообмена между частицами атмосферы, когда частицы окажутся достигнутыми поверхностью разрыва, т. е. примем гипотезу адиабатного изменения состояния воздуха в момент прохождения звуковой волны.

§ 2

Допустим согласно § 1, что гиперповерхность S с непрерывной кривизной, заданная уравнением $\Pi(x, y, z, t) = 0$ делит пространство (x, y, z, t) на области I и II с общей границей S так, что $\Pi(x, y, z, t) > 0$ для (x, y, z, t) в области II, и $\Pi(x, y, z, t) < 0$ для точек I области.

Обозначим через $f^{(I)}(x, y, z, t)$ совокупность предельных значений определенной во всем пространстве некоторой функции f на S со стороны области I, а через $f^{(II)}(x, y, z, t)$ — совокупность предельных значений той же функции на поверхности S со стороны области II. Будем обозначать разность предельных значений функции f со стороны II и I областей $f^{(II)}(x, y, z, t) - f^{(I)}(x, y, z, t)$ в какой-нибудь точке $M(x, y, z, t)$ поверхности S по Адамару через $[f(x, y, z, t)]$.

Допустим, что $f(x, y, z, t)$ является непрерывной, а ее производные первого порядка терпят разрыв при переходе через S . В силу непрерывности $f(x, y, z, t)$ на S имеем

$$[f] = 0. \quad (6)$$

Составляя по Адамару** полный дифференциал от предельных значений $f(x, y, z, t)$ по направлению, касательному к S со стороны области II, а затем области I, и беря их разность, найдем в силу условия (6) непрерывности f на S :

* См. [59], стр. 214.

** См. [51], стр. 84.

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]dx + \left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]dy + \left[\frac{\partial f}{\partial z}\right]dz + \left[\frac{\partial f}{\partial t}\right]dt = 0, \quad (7)$$

где dx, dy, dz, dt связаны соотношением

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z}dz + \frac{\partial \Pi}{\partial t}dt = 0 \quad (8)$$

В силу предположения о непрерывности кривизны поверхности (5) в любой ее точке имеет место неравенство

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial z}\right)^2 = K^2 > 0,$$

а следовательно одна из производных не равна нулю, что приводит соотношения (7) и (8) к известным условиям кинематической совместности

$$\frac{\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]}{\frac{\partial \Pi}{\partial x}} = \frac{\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]}{\frac{\partial \Pi}{\partial y}} = \frac{\left[\frac{\partial f}{\partial z}\right]}{\frac{\partial \Pi}{\partial z}} = \frac{\left[\frac{\partial f}{\partial t}\right]}{\frac{\partial \Pi}{\partial t}}, \quad (9)$$

в которых (x, y, z, t) удовлетворяет уравнению (5), т. е. точкам поверхности S . Эти условия показывают, что геометрическое место разрывов первых производных функции $f(x, y, z, t)$, образовавшее в некоторый момент поверхность S , продолжает в последующее время перемещаться вместе с поверхностью, оставаясь на ней.

Выберем направление нормали $\bar{N}$ (фиг. 1) в сторону области II, т. е. в сторону роста функции $\Pi(x, y, z, t)$ и, обозначая направляющие косинусы ее через α, β, γ , в силу известных выражений для α, β, γ , перепишем условия (9) в виде

$$\frac{\left[\frac{\partial f}{\partial z}\right]}{\alpha} = \frac{\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]}{\beta} = \frac{\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]}{\gamma} = \frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{-\omega}, \quad (10)$$

где

$$\omega = -\frac{\frac{\partial \Pi}{\partial t}}{K}.$$

Легко убедиться, что

$$\omega = -\frac{\frac{\partial \Pi}{\partial t}}{K} = -\frac{\frac{\partial \Pi}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial z}\right)^2}}, \quad (11)$$

имеющая размерность скорости, представляет скорость перемещения поверхности S в неподвижном пространстве (x, y, z) по направлению нормали $\bar{N}$ в точке $M(x, y, z, t)$ поверхности S (фиг. 1).

Предполагая, согласно § 1, что S является поверхностью разрыва второго порядка, т. е. что при переходе через нее u, v, w, p, ϱ , определенные во всем пространстве состоянием атмосферы, непрерывно меняются и по крайней мере одна из их производных первого порядка терпит разрыв непрерывности, примем $f(x, y, z, t)$ последовательно тождественной u, v, w, p, ϱ . Тогда условия (10) кинематической совместности напишутся в виде

$$\left. \begin{aligned}
 \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] &= \alpha \lambda_1, & \left[\frac{\partial v}{\partial x} \right] &= \alpha \lambda_2, & \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right] &= \alpha \lambda_3, \\
 & & \left[\frac{\partial \varrho}{\partial x} \right] &= \alpha \lambda_4, & \left[\frac{\partial p}{\partial x} \right] &= \alpha \lambda_5, \\
 \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right] &= \beta \lambda_1, & \left[\frac{\partial v}{\partial y} \right] &= \beta \lambda_2, & \left[\frac{\partial w}{\partial y} \right] &= \beta \lambda_3, \\
 & & \left[\frac{\partial \varrho}{\partial y} \right] &= \beta \lambda_4, & \left[\frac{\partial p}{\partial y} \right] &= \beta \lambda_5, \\
 \left[\frac{\partial u}{\partial z} \right] &= \gamma \lambda_1, & \left[\frac{\partial v}{\partial z} \right] &= \gamma \lambda_2, & \left[\frac{\partial w}{\partial z} \right] &= \gamma \lambda_3, \\
 & & \left[\frac{\partial \varrho}{\partial z} \right] &= \gamma \lambda_4, & \left[\frac{\partial p}{\partial z} \right] &= \gamma \lambda_5, \\
 \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right] &= -\omega \lambda_1, & \left[\frac{\partial v}{\partial t} \right] &= -\omega \lambda_2, & \left[\frac{\partial w}{\partial t} \right] &= -\omega \lambda_3, \\
 & & \left[\frac{\partial \varrho}{\partial t} \right] &= -\omega \lambda_4, & \left[\frac{\partial p}{\partial t} \right] &= -\omega \lambda_5,
 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ — параметры разрывов, зависящие от x, y, z, t и неравные одновременно нулю. Так как u, v, w, ϱ, p удовлетворяют всюду в пространстве (x, y, z, t) уравнениям (1), (2), (4), то левые части (12) должны удовлетворять ряду условий динамической совместности, которые получим из уравнений (1), (2) и уравнения адиабатного изменения состояния, написанного в дифференциальной форме. Составляя разности значений левых и правых частей этих уравнений из предельных значений входящих в них функций на поверхности S , по одну и другую сторону поверхности разрыва, получим

$$\left. \begin{aligned}
 \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right] + u \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] + v \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right] + w \left[\frac{\partial u}{\partial z} \right] + \frac{1}{\varrho} \left[\frac{\partial p}{\partial x} \right] &= 0, \\
 \left[\frac{\partial v}{\partial t} \right] + u \left[\frac{\partial v}{\partial x} \right] + v \left[\frac{\partial v}{\partial y} \right] + w \left[\frac{\partial v}{\partial z} \right] + \frac{1}{\varrho} \left[\frac{\partial p}{\partial y} \right] &= 0, \\
 \left[\frac{\partial w}{\partial t} \right] + u \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right] + v \left[\frac{\partial w}{\partial y} \right] + w \left[\frac{\partial w}{\partial z} \right] + \frac{1}{\varrho} \left[\frac{\partial p}{\partial z} \right] &= 0, \\
 \left[\frac{\partial \varrho}{\partial t} \right] + u \left[\frac{\partial \varrho}{\partial x} \right] + v \left[\frac{\partial \varrho}{\partial y} \right] + w \left[\frac{\partial \varrho}{\partial z} \right] + \varrho \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] + \varrho \left[\frac{\partial v}{\partial y} \right] + \varrho \left[\frac{\partial w}{\partial z} \right] &= 0, \\
 \left[\frac{\partial p}{\partial t} \right] + u \left[\frac{\partial p}{\partial x} \right] + v \left[\frac{\partial p}{\partial y} \right] + w \left[\frac{\partial p}{\partial z} \right] + \kappa p \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] + \kappa p \left[\frac{\partial v}{\partial y} \right] + \kappa p \left[\frac{\partial w}{\partial z} \right] &= 0,
 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где $\kappa = \frac{c_p}{c_v} = 1,41$ для атмосферного воздуха. Заметим, что составляющие объемной силы — силы тяжести — не вошли в систему (13) ввиду их непрерывности при переходе через поверхность S .

Внося в полученную систему (13) выражения для $\left[\frac{\partial u}{\partial t} \right], \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right], \dots, \left[\frac{\partial p}{\partial z} \right]$ из условий (12), придем к следующей линейной однородной системе уравнений относительно параметров разрыва $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_5$:

$$\left. \begin{aligned}
 \Omega \lambda_1 - \frac{\alpha}{\varrho} \lambda_5 &= 0, \\
 \Omega \lambda_2 - \frac{\beta}{\varrho} \lambda_5 &= 0, \\
 \Omega \lambda_3 - \frac{\gamma}{\varrho} \lambda_5 &= 0, \\
 \Omega \lambda_4 - \varrho (\alpha \lambda_1 + \beta \lambda_2 + \gamma \lambda_3) &= 0, \\
 \Omega \lambda_5 - \kappa p (\alpha \lambda_1 + \beta \lambda_2 + \gamma \lambda_3) &= 0,
 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

где

$$\Omega = \omega - \alpha u - \beta v - \gamma w. \quad (15)$$

Так как $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_3$ не обращаются в нуль одновременно, условием совместности (14) является

$$\begin{vmatrix} \Omega & 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha}{\rho} \\ 0 & \Omega & 0 & 0 & -\frac{\beta}{\rho} \\ 0 & 0 & \Omega & 0 & -\frac{\gamma}{\rho} \\ -\alpha\rho & -\beta\rho & -\gamma\rho & \Omega & 0 \\ -\alpha\kappa\rho & -\beta\kappa\rho & -\gamma\kappa\rho & 0 & \Omega \end{vmatrix} = \Omega^3 (\Omega^2 - c^2) = 0, \quad (16)$$

где $c = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\kappa RT}$ — известное выражение Лапласа для скорости звука.

Таким образом, условием кинематической и динамической совместности является уравнение (16), распадающееся на следующие:

$$\Omega = \omega - \alpha u - \beta v - \gamma w = 0, \quad (17)$$

$$\Omega^2 = (\omega - \alpha u - \beta v - \gamma w)^2 = c^2. \quad (18)$$

Легко непосредственно установить кинематический смысл выражения (15) — разности скорости перемещения поверхности разрыва S по направлению нормали к поверхности и нормальной составляющей скорости частицы в той же точке поверхности S . Рассчитывая скорость распространения поверхности разрыва в среде независимо от состояния ее движения, т. е. по отношению к подвижному наблюдателю, увлекаемому движением частицы, можно установить* эту скорость равной Ω . Таким образом, имеем интересное соотношение

$$\omega'_i = \Omega + (\alpha u + \beta v + \gamma w),$$

показывающее, что скорость перемещения поверхности разрыва в неподвижном пространстве (по отношению к неподвижному наблюдателю) равна относительной (по отношению к подвижному наблюдателю) скорости распространения этой поверхности, сложенной со скоростью переносного движения самой среды. Иначе, имеем кинематический закон сложения скоростей.

Заметим, что этот результат не требует предположения, чтобы поверхность S являлась поверхностью разрыва каких-либо элементов.

Условие (17), согласно сказанному о физическом смысле Ω , является условием стационарности S , следовательно каждая частица, принадлежащая поверхности, описывает линию тока, а потому семейство лучей совпадает с семейством линий тока движущейся жидкости. В этом случае $\omega = \alpha u + \beta v + \gamma w$ имеет порядок ветровой скорости в атмосфере, а следовательно противоречит наблюдениям. Второе условие (18), установленное Гюгоньо [56], показывает, что Ω равна скорости распространения звука c , а следовательно можно утверждать, что в любой точке поверхности S скорость ее перемещения равна скорости c распространения звука (по отношению к наблюдателю, связанному со средой), сложенной со скоростью частицы в этой точке.

Легко видеть из (14), что $\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2 + \gamma\lambda_3 \neq 0$, т. е. вектор разрыва $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ производных скорости не лежит в касательной плоскости к поверхности S , ибо в противном случае или имеем поверхность разрыва низшего

* См. [57], стр. 242.

порядка ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$), или стационарный характер перемещения ($\Omega = 0$).

Из первых трех уравнений (14) следует, что $\frac{\lambda_1}{\alpha} = \frac{\lambda_2}{\beta} = \frac{\lambda_3}{\gamma}$, т. е. вектор $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ направлен по нормали к поверхности S , иными словами, что разрыв имеет продольный характер. Кроме того, система (14) позволяет выразить параметры разрыва через какой-либо один из них, а для последнего установить уравнение, позволяющее проследить изменение разрыва по мере перемещения поверхности S в пространстве*. Внося выражения для $\alpha, \beta, \gamma, \omega$ в условие (18) совместности, получим интересное нас уравнение перемещения поверхности разрыва

$$\left[\frac{\partial \Pi}{\partial t} + u \frac{\partial \Pi}{\partial x} + v \frac{\partial \Pi}{\partial y} + w \frac{\partial \Pi}{\partial z} \right]^2 - c^2 \left[\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial z} \right)^2 \right] = 0, \quad (19)$$

где u, v, w, c — заданные функции высоты z , характеризующие состояние атмосферы.

Разрешая (19) относительно $\frac{\partial \Pi}{\partial t}$ и вводя обозначения

$$u \frac{\partial \Pi}{\partial x} + v \frac{\partial \Pi}{\partial y} + w \frac{\partial \Pi}{\partial z} + c \sqrt{\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial z} \right)^2} = H_1 \left(z, \frac{\partial \Pi}{\partial x}, \frac{\partial \Pi}{\partial y}, \frac{\partial \Pi}{\partial z} \right), \quad (20)$$

$$u \frac{\partial \Pi}{\partial x} + v \frac{\partial \Pi}{\partial y} + w \frac{\partial \Pi}{\partial z} - c \sqrt{\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial z} \right)^2} = H_2 \left(z, \frac{\partial \Pi}{\partial x}, \frac{\partial \Pi}{\partial y}, \frac{\partial \Pi}{\partial z} \right), \quad (20_1)$$

напишем уравнение системы двух волновых поверхностей в форме уравнений Якоби:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} + H_1 \left(z, \frac{\partial \Pi}{\partial x}, \frac{\partial \Pi}{\partial y}, \frac{\partial \Pi}{\partial z} \right) = 0, \quad (21)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} + H_2 \left(z, \frac{\partial \Pi}{\partial x}, \frac{\partial \Pi}{\partial y}, \frac{\partial \Pi}{\partial z} \right) = 0. \quad (21_1)$$

Легко убедиться в том, что волны, определяемые уравнениями (21) и (21₁), распространяются в противоположных направлениях. В самом деле, скорость перемещения волны по направлению нормали (α, β, γ) в какой-нибудь точке поверхности волны определится согласно (11) и (21) выражением

$$\omega_1 = H_1(z, \alpha, \beta, \gamma). \quad (22)$$

В направлении же противоположном $(-\alpha, -\beta, -\gamma)$ в той же точке поверхности скорость перемещения той же волны определится выражением

$$\omega' = H_1(z, -\alpha, -\beta, -\gamma) = H_2(z, \alpha, \beta, \gamma). \quad (23)$$

С другой стороны, скорость второй волновой поверхности из уравнения (21₁) в точке $M(x, y, z)$ в направлении (α, β, γ) выразится так:

$$\omega_1 = H_2(z, \alpha, \beta, \gamma). \quad (24)$$

Из (23) и (24) следует, что $\omega_1 = \omega'$, т. е. что вторая поверхность тождественна с первой, но движется в противоположном направлении по другой вообще траектории.

В последующем мы будем изучать звуковые волны во всех направлениях, следовательно достаточно ограничиться изучением одного уравнения (21). Скажем, что атмосфера в смысле проводимости в ней звукового возмущения

* См. [50], стр. 44—45, и [58], стр. 59.

является анизотропной, просто преломляющей средой, в отличие от многократно преломляющих сред, в которых возможны волны разной природы, перемещающиеся в одном направлении с разными скоростями*. Заметим, что в уравнении Якоби (21)

$$\frac{\partial H_1}{\partial t} = 0.$$

Тогда уравнение волновой поверхности $\Pi(x, y, z, t) = 0$ можно представить в более простом и удобном для дальнейшего виде

$$F(x, y, z) - t = 0, \quad (25)$$

причем для любого $t = \text{const}$ допустим $F(x, y, z) > t$ в области II и $F(x, y, z) < t$ в области I. Уравнение (21) перепишется в следующем виде:

$$u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} + c \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} = 1. \quad (26)$$

Обозначим $\frac{\partial F}{\partial x} = p_1$, $\frac{\partial F}{\partial y} = p_2$, $\frac{\partial F}{\partial z} = p_3$ и введем углы наклона θ ($-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) и азимута φ ($0 \leq \varphi < 2\pi$) положительной нормали $\vec{N}$ (фиг. 1) к поверхности волны S , связанные с p_1, p_2, p_3 известными соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{p_1}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}} &= \cos \theta \cos \varphi, \\ \frac{p_2}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}} &= \cos \theta \sin \varphi, \\ \frac{p_3}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}} &= \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Разрешая систему (26), (27) относительно p_1, p_2, p_3 , получим:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \frac{\cos \theta \cos \varphi}{c + U \cos \theta + w \sin \theta}, \\ p_2 &= \frac{\cos \theta \sin \varphi}{c + U \cos \theta + w \sin \theta}, \\ p_3 &= \frac{\sin \theta}{c + U \cos \theta + w \sin \theta}, \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

где $U = u \cos \varphi + v \sin \varphi$ — составляющая скорости ветра по горизонтальному направлению азимута φ . Вводя обозначение

$$H(z, \theta, \varphi) = - \frac{\sin \theta}{c + U \cos \theta + w \sin \theta}, \quad (29)$$

напишем последнее из уравнений (28) в форме уравнения Якоби

$$p_3 + H(z, \theta, \varphi) = 0, \quad (30)$$

где θ и φ суть функции p_1 и p_2 , определяемые системой первых двух уравнений (28).

§ 3

Согласно общей теории волновая поверхность (25) в пространстве (x, y, z, t) образуется характеристическим многообразием, проведенным через точки заданного многообразия двух измерений в четырехмерном пространстве. Харак-

* См. [60], стр. 43.

теристическое многообразие уравнения (30) [или бихарактеристики системы уравнений гидродинамики], являющееся семейством звуковых лучей, определяется известной системой обыкновенных уравнений

$$\frac{dx}{\frac{\partial H}{\partial p_1}} = \frac{dy}{\frac{\partial H}{\partial p_2}} = \frac{dz}{1} = \frac{dt}{p_1 \frac{\partial H}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial H}{\partial p_2} + p_3} = \frac{-dp_1}{\frac{\partial H}{\partial x}} = \frac{-dp_2}{\frac{\partial H}{\partial y}} = \frac{-dp_3}{\frac{\partial H}{\partial z}}. \quad (31)$$

Рассматривая $H(z, p_1, p_2)$ как сложную функцию

$$H[z, p_1(\theta, \varphi), p_2(\theta, \varphi)] = -\frac{\sin \theta}{c + U \cos \theta + w \sin \theta},$$

определяемую уравнениями (28), можем уравнения (31) звуковых лучей представить в форме канонических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dz} = \frac{\partial H}{\partial p_1} &= \frac{c \cos \theta \cos \varphi + u}{c \sin \theta + w}, & \frac{dp_1}{dz} &= -\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \\ \frac{dy}{dz} = \frac{\partial H}{\partial p_2} &= \frac{c \cos \theta \sin \varphi + v}{c \sin \theta + w}, & \frac{dp_2}{dz} &= -\frac{\partial H}{\partial y} = 0, \\ \frac{dt}{dz} = p_1 \frac{\partial H}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial H}{\partial p_2} + p_3 &= \frac{1}{c \sin \theta + w}, & \frac{dp_3}{dz} &= -\frac{\partial H}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dz} - \frac{\partial H}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dz}. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Заметим, что левая часть уравнения (25) является инвариантом по отношению к уравнениям (32) характеристик. Действительно, нетрудно убедиться, принимая во внимание (32), что

$$\frac{d}{dz} [F(x, y, z) - t] = p_1 \frac{dx}{dz} + p_2 \frac{dy}{dz} + p_3 - \frac{dt}{dz} = 0.$$

Следовательно характеристики (32) действительно являются звуковыми лучами, вдоль которых передается заданное начальное возмущение.

Из первых трех уравнений (32) легко видеть, что если невозмущенное состояние атмосферы не находится в покое, т. е. если $u \neq 0$, $v \neq 0$, $w \neq 0$, то касательная к лучу не совпадает с нормалью к поверхности волны. Направляющие косинусы касательной к лучу в какой-нибудь точке волновой поверхности определяются выражениями

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + 1}} = \frac{c \cos \theta \cos \varphi + u}{\sqrt{c^2 + u^2 + v^2 + w^2 + 2cU \cos \theta + 2cw \sin \theta}}, \\ \frac{dy}{ds} &= \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + 1}} = \frac{c \cos \theta \sin \varphi + v}{\sqrt{c^2 + u^2 + v^2 + w^2 + 2cU \cos \theta + 2cw \sin \theta}}, \\ \frac{dz}{ds} &= \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + 1}} = \frac{c \sin \theta + w}{\sqrt{c^2 + u^2 + v^2 + w^2 + 2cU \cos \theta + 2cw \sin \theta}}. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Следовательно угол α между касательной к звуковому лучу и нормалью к поверхности волны определится так:

$$\cos \alpha = \frac{c + U^2 \cos \theta + w \sin \theta}{\sqrt{c^2 + u^2 + v^2 + w^2 + 2cU \cos \theta + 2cw \sin \theta}}. \quad (34)$$

Для спокойной среды, т. е. при $u = v = w = 0$, очевидно $\alpha = 0$, т. е. звуковой луч ортогонален к волновой поверхности.

Обращаясь к первым интегралам уравнений характеристик, заметим, что последнее из уравнений (32) имеет первым интегралом левую часть уравнения (30).

Введем следующие обозначения: через x_0, y_0, z_0 обозначим координаты точки M_0 начала звукового луча, через которое проходит волновая поверхность в начальный момент времени t_0 ; через θ_0, φ_0 обозначим наклонение и азимут нормали в точке x_0, y_0, z_0 той же поверхности в момент t_0 ; через u_0, v_0, w_0 — слагающие скорости ветра на высоте z_0 , а следовательно в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$; через c_0 — скорость распространения звука в той же точке; наконец, через $U_0 = u_0 \cos \varphi_0 + v_0 \sin \varphi_0$ — составляющую скорости ветра в точке M_0 , по горизонтальному направлению в азимуте φ_0 . Первые интегралы уравнений $\frac{dp_1}{dz} = 0, \frac{dp_2}{dz} = 0$, имея в виду уравнения (28), очевидно, можно написать в виде

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \frac{\cos \theta \cos \varphi}{c + U \cos \theta + w \sin \theta} = p_{10} = \frac{\cos \theta_0 \cos \varphi_0}{c_0 + U_0 \cos \theta_0 + w_0 \sin \theta_0}, \\ p_2 &= \frac{\cos \theta \sin \varphi}{c + U \cos \theta + w \sin \theta} = p_{20} = \frac{\cos \theta_0 \sin \varphi_0}{c_0 + U_0 \cos \theta_0 + w_0 \sin \theta_0}, \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

откуда непосредственно находим

$$\varphi = \varphi_0 \quad (36)$$

$$\frac{c}{\cos \theta} + U + w \operatorname{tg} \theta = \frac{c_0}{\cos \theta_0} + U_0 + w_0 \operatorname{tg} \theta_0 = m_0. \quad (37)$$

Последнее уравнение позволяет проследить изменение наклонения нормали перемещающей волны с изменением высоты z , т. е. представляет закон преломления звукового луча. Очевидно, изменение θ зависит от градиентов скорости звука и скорости ветра

$$\frac{d\theta}{dz} = -\frac{\cos \theta}{c \sin \theta + w} (c' + U' \cos \theta + w'),$$

где c', U', w' — производные c, U, w по переменному z . Уравнение (36) показывает, что азимут нормали волны не меняется по пути ее перемещения. Выпишем первые интегралы трех первых уравнений системы (32), т. е. уравнений звукового луча и времени его пробега, опираясь на введенные обозначения постоянных,

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + \int_{x_0}^x \frac{c \cos \theta \cos \varphi_0 + u}{c \sin \theta + w} dz, \\ y &= y_0 + \int_{y_0}^y \frac{c \cos \theta \sin \varphi_0 + v}{c \sin \theta + w} dz, \\ t &= t_0 + \int_{t_0}^t \frac{dz}{c \sin \theta + w}, \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

где $\theta = \theta(z)$ определяется уравнением (37).

В частном случае изотермического состояния атмосферы, $c(z) = c_0$, и постоянства ветра с высотой, т. е. при $u(z) = u_0, v(z) = v_0, w(z) = w_0$, уравнения звуковых лучей напишутся в виде

$$\begin{aligned} (x - x_0) - u_0(t - t_0) &= c_0(t - t_0) \cos \theta_0 \cos \varphi_0, \\ (y - y_0) - v_0(t - t_0) &= c_0(t - t_0) \cos \theta_0 \sin \varphi_0, \\ (z - z_0) - w_0(t - t_0) &= c_0(t - t_0) \sin \theta_0. \end{aligned}$$

§ 4

Чтобы построить уравнение движущейся волновой поверхности (25), согласно теории Коши, необходимо задать начальное многообразие двух измерений, через которое волновая поверхность проходит. Рассмотрим разные случаи задания начального многообразия.

I. Общий случай задачи Коши, когда в четырехмерном пространстве задается начальное многообразие двух измерений:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= x_0(\lambda, \mu), \\ y_0 &= y_0(\lambda, \mu), \\ z_0 &= z_0(\lambda, \mu), \\ t_0 &= t_0(\lambda, \mu). \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Для каждого момента t_0 уравнения (39) определяют линию в пространстве (x, y, z) , а следовательно заданное многообразие требует, чтобы волновая поверхность проходила через подвижную линию, которая образует гиперповерхность Σ двух измерений (39) в четырехмерном пространстве. Выберем на последней ортогональную сеть кривых, за одну из которых, для удобства в дальнейшем, примем семейство линий $t_0 = \text{const}$; тогда уравнение начальной гиперповерхности, отнесенное к новым параметрам, напишется в виде

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= x_0(\lambda, t_0), \\ y_0 &= y_0(\lambda, t_0), \\ z_0 &= z_0(\lambda, t_0). \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Согласно теории Коши потребуем, чтобы многообразие (40) удовлетворяло дифференциальному соотношению

$$dt_0 = \frac{\partial F_0}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial F_0}{\partial y_0} dy_0 + \frac{\partial F_0}{\partial z_0} dz_0 = p_{10} dx_0 + p_{20} dy_0 + p_{30} dz_0. \quad (41)$$

Внося в правую и левую части (41) выражения (35) и (40), найдем условия, определяющие направление нормали (θ_0, φ_0) к фронту волны:

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta_0 \cos \varphi_0 \left[\frac{\partial x_0}{\partial \lambda} \right] + \cos \theta_0 \sin \varphi_0 \left[\frac{\partial y_0}{\partial \lambda} \right] + \sin \theta_0 \left[\frac{\partial z_0}{\partial \lambda} \right] &= 0, \\ \cos \theta_0 \cos \varphi_0 \left(\frac{\partial x_0}{\partial t_0} - u_0 \right) + \cos \theta_0 \sin \varphi_0 \left(\frac{\partial y_0}{\partial t_0} - v_0 \right) + \sin \theta_0 \left(\frac{\partial z_0}{\partial t_0} - w_0 \right) &= c_0 \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Первое уравнение из полученной системы (42) показывает, что направление (θ_0, φ_0) лежит в плоскости, нормальной к линии $t_0 = \text{const}$ (40), образующей своим движением начальную гиперповерхность Σ . Во втором из уравнений (42) $\frac{\partial x_0}{\partial t_0}$, $\frac{\partial y_0}{\partial t_0}$, $\frac{\partial z_0}{\partial t_0}$ — составляющие скорости перемещения линий, образующих поверхность Σ в направлении $\lambda = \text{const}$ и принадлежащих семейству, ортогональному линиям $t_0 = \text{const}$. Обозначая через $\overline{W}$ геометрическую разность скорости перемещения линии $t_0 = \text{const}$ $\left(\frac{\partial x_0}{\partial t_0}, \frac{\partial y_0}{\partial t_0}, \frac{\partial z_0}{\partial t_0} \right)$ и скорости ветра (u_0, v_0, w_0) в той же точке, а через α угол между направлением $\overline{W}$ и направлением искомой нормали (θ_0, φ_0) , найдем из второго уравнения (42)

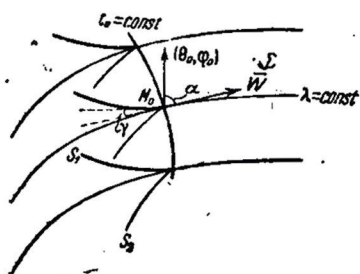
$$\cos \alpha = \frac{c_0}{\overline{W}}. \quad (43)$$

В частном случае при $u_0 = v_0 = w_0 = 0$, очевидно $\overline{W}$ является величиной скорости перемещения линии $t_0 = \text{const}$ вдоль ортогональной линии $\lambda = \text{const}$, проходящей через рассматриваемую точку M_0 гиперповерхности Σ . Движу-

тящаяся „звучащая“ линия образует две симметричные полости S_1 и S_2 (фиг. 2), наклоненные к поверхности Σ под углом γ

$$\sin \gamma = \frac{c_0}{W}. \quad (44)$$

Очевидно действительными полостями S_1 и S_2 будут при условии $c_0 \leq W$, т. е. если подвижные звуковые источники линейного многообразия перемещаются со сверхзвуковыми скоростями. При $W = c_0$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$ обе полости обра-



Фиг. 2

зуют одну поверхность, ортогональную Σ и проходящую через $t_0 = \text{const}$. Образование двух полостей S_1 и S_2 волновой поверхности тесно связано с явлениями отражения и преломления волн на границе раздела двух сред, что будет показано далее.

Построенная волновая поверхность по заданному многообразию (39) или (40), согласно теории Коши, может быть интерпретирована в согласии с принципом Гюйгенса как огибающая поверхность в любой момент времени t семейства волновых поверхностей — элементарных волн Гюйгенса, возникающих от источников, распределенных на многообразии (39). Обоснованием

такой формулировки принципа Гюйгенса служит метод Лагранжа-Шарпи построения интегральной поверхности по полному интегралу Лагранжа. Последний достаточно просто может быть получен известным правилом Якоби построения полного интеграла уравнения (30) в частных производных, приведенного к виду Якоби, по известным первым интегралам характеристик.

Возьмем какую-нибудь точку $M_0(x_0, y_0, z_0, t_0)$, принадлежащую многообразию (39), в качестве начальной точки характеристики. Пользуясь обозначениями p_{10} , p_{20} постоянных первых интегралов (35) и выражением (29), напишем полный интеграл уравнения Якоби (30) в виде

$$t = x_0 p_{10} + y_0 p_{20} + \int_{z_0}^z \frac{dz}{c \sin \theta + w} + \text{const},$$

или, исключая аддитивную постоянную,

$$t = F(x_0, y_0, z_0, t_0, x, y, z) = t_0 + \int_{z_0}^z \frac{dz}{c \sin \theta + w}, \quad (45)$$

где θ выражается через θ_0, φ_0 из (37), а последние суть функции x_0, y_0, z_0, x, y, z , удовлетворяющие первым двум уравнениям (38). Таким образом, полный интеграл образуется исключением θ_0, φ_0 из системы (38), а следовательно представляет геометрическое место бихарактеристик, исходящих из одной точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Образованная таким образом гиперповерхность (45), являясь интегралом с особой конической точкой (x_0, y_0, z_0, t_0) , представляет с геометрической точки зрения по определению Адамара* характеристический коноид с вершиной в точке (x_0, y_0, z_0, t_0) , а с физической точки зрения — элементарную волну Гюйгенса. Помещая вершины этих коноидов на многообразии (39) и находя огибающую семейства поверхностей (45) для любого момента t , получим в качестве огибающей поверхность фронта для того же момента t искомой волны. Легко установить**, что условием сопри-

* См. [51], стр. 289.

** См. [50], стр. 181—183.

косновения элементарной волны и ее огибающей — искомой волновой поверхностью в какой-нибудь момент времени t является

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta_0 \cos \varphi_0 \frac{\partial x_0}{\partial \lambda} + \cos \theta_0 \sin \varphi_0 \frac{\partial y_0}{\partial \lambda} + \sin \theta_0 \frac{\partial z_0}{\partial \lambda} - m_0 \cos \theta_0 \frac{\partial t_0}{\partial \lambda} &= 0, \\ \cos \theta_0 \cos \varphi_0 \frac{\partial x_0}{\partial \mu} + \cos \theta_0 \sin \varphi_0 \frac{\partial y_0}{\partial \mu} + \sin \theta_0 \frac{\partial z_0}{\partial \mu} - m_0 \cos \theta_0 \frac{\partial t_0}{\partial \mu} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

где m_0 определяется из (37).

Очевидно (42) является частным выражением (46). Эти условия (46), позволяющие определить θ_0 , φ_0 в функции параметров λ , μ , суть следствия требования Коши (41). Внося полученные из (46) $\theta_0(\lambda, \mu)$, $\varphi_0(\lambda, \mu)$ — параметры направления в точке M_0 многообразия (39) — в уравнения (38) звуковых лучей, найдем в параметрической форме уравнение искомой волновой поверхности:

$$\left. \begin{aligned} x &= x(\lambda, \mu; z), \\ y &= y(\lambda, \mu; z), \\ t &= t(\lambda, \mu; z). \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Наконец, исключая из уравнений (47) λ , μ , получим (25).

II. Допустим теперь, что в начальный момент t_0 волновая поверхность занимает начальное положение S_0 , определяемое уравнениями

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= x_0(\lambda, \mu), \\ y_0 &= y_0(\lambda, \mu), \\ z_0 &= z_0(\lambda, \mu). \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Этот случай, очевидно, получим из вышеизобранного, полагая $t_0 = \text{const}$ в уравнениях (39) и (46). Уравнения для определения начального направления нормали волновой поверхности примут вид

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta_0 \cos \varphi_0 \frac{\partial x_0}{\partial \lambda} + \cos \theta_0 \sin \varphi_0 \frac{\partial y_0}{\partial \lambda} + \sin \theta_0 \frac{\partial z_0}{\partial \lambda} &= 0, \\ \cos \theta_0 \cos \varphi_0 \frac{\partial x_0}{\partial \mu} + \cos \theta_0 \sin \varphi_0 \frac{\partial y_0}{\partial \mu} + \sin \theta_0 \frac{\partial z_0}{\partial \mu} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Исключая θ_0 , φ_0 из системы (49) и (38), получим уравнение искомой поверхности в параметрической форме (47). Условия (49) показывают, что направление θ_0 , φ_0 перпендикулярно начальному положению S_0 поверхности волны при $t = t_0$.

III. Не меньший интерес представляет случай подвижного непрерывно действующего источника, т. е. случай, когда задается начальное многообразие одного измерения в виде кривой в четырехмерном пространстве

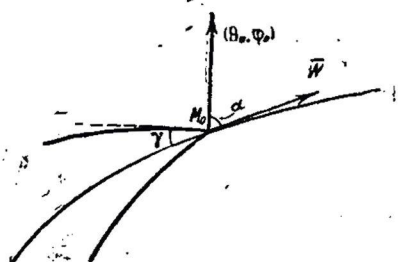
$$\left. \begin{aligned} x_0 &= x_0(\lambda), \\ y_0 &= y_0(\lambda), \\ z_0 &= z_0(\lambda), \\ t_0 &= t_0(\lambda). \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

В этом случае мы имеем задачу, отличную от задачи Коши. Составляя выражение для полного дифференциала (41), имеем одно соотношение для p_{10} , p_{20} или для θ_0 , φ_0 :

$$\cos \theta_0 \cos \varphi_0 \left(\frac{dx_0}{dt_0} - u_0 \right) + \cos \theta_0 \sin \varphi_0 \left(\frac{dy_0}{dt_0} - v_0 \right) + \sin \theta_0 \left(\frac{dz_0}{dt_0} - w_0 \right) = c_0. \quad (51)$$

Оставим один из параметров θ_0, φ_0 произвольным. Тогда условие (51) определит другой в функции первого и параметра λ ; следовательно искомое решение представляет характеристический конус, образованный геометрическим местом характеристик, зависящих от одного параметра.

Условие (51) может быть истолковано аналогично второму из условия (42). Обозначая через $\bar{W}$ геометрическую разность скорости перемещения источника $\left(\frac{dx_0}{dt_0}, \frac{dy_0}{dt_0}, \frac{dz_0}{dt_0}\right)$ и скорости ветра (u_0, v_0, w_0) в какой-нибудь точке M_0 многообразия (50) (фиг. 3), а через α — угол между направлением $\bar{W}$ и направлением нормали (θ_0, φ_0) , можем написать



Фиг. 3

условие (51) в виде (43). В частном случае при $u_0 = v_0 = w_0 = 0$ имеем волновую поверхность в виде конуса из характеристик, наклоненных к траекториям движения источника под углом γ , определяемым из (44). Характеристический конус является действительным при условии $c_0 \leq \bar{W}$, т. е. при сверхзвуковой скорости перемещения источника. Например, при равномерном движении источника вдоль положительной оси x со сверхзвуковой скоростью $\bar{W}$ в спокойной изотермической среде, волновая поверхность представится круглым конусом с осью симметрии, совпадающей с осью x :

$$(x - \bar{W}t)^2 + (y^2 + z^2) \left(\frac{\bar{W}^2}{c^2} - 1 \right) = 0, \quad (52)$$

где c — скорость звука.

Разбираемый случай может быть рассмотрен как предельный случай задачи Коши. Именно, рассмотрим каналовую поверхность в пространстве четырех измерений семейства сфер как угодно малого радиуса ε , зависящих от одного параметра:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= a(\lambda) + \varepsilon \cos \vartheta \cos \psi, \\ y_0 &= b(\lambda) + \varepsilon \cos \vartheta \sin \psi, \\ z_0 &= c(\lambda) + \varepsilon \sin \vartheta, \\ t_0 &= d(\lambda), \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

$$\cos \vartheta \cos \psi a' + \cos \vartheta \sin \psi b' + \sin \vartheta c' = 0. \quad (54)$$

Система (53), (54) определяет геометрическое место характеристических окружностей семейства сфер (53), ортогональных к кривой их центров, а следовательно многообразие двух измерений. Выписывая условия (46) и решая задачу Коши, будем иметь при переходе к пределу $\varepsilon \rightarrow 0$ разбираемый случай подвижного источника.

IV. Случай заданного распределения источника вдоль некоторой линии в трехмерном пространстве в начальный момент времени t_0 , может быть рассмотрен как частный разобранный. Соотношение для параметров θ_0, φ_0 направления нормали начального положения волновой поверхности представится в виде

$$\cos \theta_0 \cos \varphi_0 \frac{dx_0}{d\lambda} + \cos \theta_0 \sin \varphi_0 \frac{dy_0}{d\lambda} + \sin \theta_0 \frac{dz_0}{d\lambda} = 0. \quad (55)$$

Оно показывает, что нормаль лежит в плоскости, перпендикулярной линии источников. Уравнение характеристического конуса напишется после исключения параметров из системы (55) и (38).

Замечание о предельном случае задачи Коши относительно начальной поверхности каналов как угодно малого радиуса может быть в равной мере распространено и на разбираемый случай. Легко видеть, что для изотермического и спокойного состояния атмосферы волновая поверхность сама является поверхностью каналов с линией центров, совпадающей с заданной линией источников.

V. Рассмотрим наконец в качестве начального многообразия Коши элементарную сферу радиуса ε с центром в точке (x_0, y_0, z_0) в начальный момент t_0 и потребуем, чтобы волновая поверхность к моменту t_0 совпадала с этой сферой. Легко убедиться, что условия (49) удовлетворяются произвольным выбором θ_0, φ_0 при произвольном ε .

Таким образом, уравнения (38) семейства лучей при постоянных x_0, y_0, z_0, t_0 окажутся зависящими от двух произвольных параметров θ_0, φ_0 — направления нормали к элементарной сфере:

$$\left. \begin{aligned} x &= x(x_0, z_0, \theta_0, \varphi_0; z), \\ y &= y(y_0, z_0, \theta_0, \varphi_0; z), \\ t &= t(t_0, z_0, \theta_0, \varphi_0; z). \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Следовательно семейство звуковых лучей является вообще криволинейной конгруэнцией лучей, выходящих из точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ в начальный момент t_0 . Этот случай представляет собой интерес в том отношении, что, как было уже выше отмечено, в естественных условиях при образовании звукового возмущения мощным импульсом, ввиду больших расстояний распространения звуковой волны, начальную область возмущения можно отождествить с мгновенным точечным источником, а следовательно уравнения (38) описывают конгруэнцию звуковых лучей и время их пробега. В дальнейшем мы ограничимся изучением этого случая образования звуковой волны в атмосфере. Выше мы видели, что волновая поверхность от точечного источника является характеристическим коноидом с вершиной в точке (x_0, y_0, z_0, t_0) и представляет элементарную волну Гюйгенса.

§ 5

Покажем теперь, что звуковые лучи, определяемые системой дифференциальных уравнений (32), следуют принципу Ферма. Для этого составим функцию Лагранжа

$$L = -H + p_1 \frac{\partial H}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial H}{\partial p_2}, \quad (57)$$

где H определяется уравнением (29), а p_1, p_2, x', y' — канонические переменные. Внося в правую часть (57) выражения для H из (29) и для p_1, p_2 из (28), найдем

$$L = \frac{1}{c \sin \theta + w}. \quad (58)$$

Легко непосредственно обнаружить справедливость соотношений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x'} &= p_1, \\ \frac{\partial L}{\partial y'} &= p_2, \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

которые позволяют представить вторую группу уравнений луча в форме уравнений Лагранжа:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial L}{\partial x'} \right) &= 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

а следовательно звуковые лучи могут быть рассматриваемы как экстремалы интеграла

$$J = \int L dz. \quad (61)$$

Последний в силу выражения (58) для L и третьего уравнения (32) дает время пробега этого луча. Очевидно справедливо и обратное рассуждение при наличии первой группы уравнений (32), т. е.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dz} = x' &= \frac{c \cos \theta \cos \varphi + u}{c \sin \theta + w}, \\ \frac{dy}{dz} = y' &= \frac{c \cos \theta \sin \varphi + v}{c \sin \theta + w}, \\ \frac{dt}{dz} = t' &= \frac{1}{c \sin \theta + w}. \end{aligned}$$

Эта группа может быть переписана в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= c \cos \theta \cos \varphi + u, \\ \frac{dy}{dt} &= c \cos \theta \sin \varphi + v, \\ \frac{dz}{dt} &= c \sin \theta + w, \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

являющимся выражением кинематического закона сложения скоростей для произвольной точки звукового луча или точки волновой поверхности. Выше (§ 2) была отмечена справедливость этого закона для произвольной точки поверхности, перемещающейся в подвижной жидкости. Таким образом, можно прийти к уравнениям звуковых лучей непосредственно, кладя в основу распространения звуковых волн вариационный принцип, минуя теорию Гюгоньо-Адамара.

Что же касается уравнения волновой поверхности, перемещающейся вдоль экстремалей, то достаточно построить функцию Гамильтона H

$$H = -L + x' \frac{\partial L}{\partial x'} + y' \frac{\partial L}{\partial y'}, \quad (63)$$

внося $L = \frac{dt}{dz} = \frac{1}{c \sin \theta + w}$ и выражения для $x' = \frac{dx}{dz}$, $y' = \frac{dy}{dz}$ из (62), найдем уже известное выражение (29)

$$H = -\frac{\sin \theta}{c + U \cos \theta + w \sin \theta}.$$

Тогда уравнение перемещающейся волновой поверхности в подвижной среде заданного состояния напишется в форме уравнения Якоби

$$p_3 + H = 0. \quad (30)$$

§ 6

До сих пор предполагалось, что в невозмущенном состоянии атмосферы параметры, характеризующие состояние, имели непрерывное распределение; следовательно предполагалось, что u , v , w , c суть непрерывные функции высоты. Однако представляет большой интерес рассмотреть влияние на перемещающееся в атмосфере звуковое возмущение вообще подвижной деформирующейся поверхности раздела двух различных состояний атмосферы. За такую

поверхность раздела может быть принята, например, граница облака, поверхность полярного фронта, поверхность инверсии и т. д.

Рассмотрим общий случай* взаимодействия какой-либо перемещающейся поверхности в среде с поверхностью раздела разных ее состояний. Пусть $\Phi(x, y, z, t) = 0$ является уравнением подвижной поверхности раздела двух состояний среды. Обозначим через Ω скорость перемещения этой поверхности раздела вдоль положительного направления нормали из области 1-го состояния в область 2-го состояния. Тогда согласно (11)

$$\Omega = - \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2}}. \quad (64)$$

Пусть $\Pi_i(x, y, z, t) = 0$ — уравнение падающей волны, перемещающейся в 1-й среде со скоростью

$$\omega_i = - \frac{\frac{\partial \Pi_i}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \Pi_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Pi_i}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Pi_i}{\partial z}\right)^2}}. \quad (65)$$

Падающая волна $\Pi_i(x, y, z, t) = 0$ пересечет поверхность раздела $\Phi(x, y, z, t) = 0$ в каждый момент времени по линии, т. е. по многообразию двух измерений:

$$\left. \begin{aligned} x &= x(\lambda, \mu), \\ y &= y(\lambda, \mu), \\ z &= z(\lambda, \mu), \\ t &= t(\lambda, \mu). \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

Согласно принципу Гюйгенса, каждая точка многообразия (66), являясь самостоятельным источником, даст образование элементарным волнам Гюйгенса: в 1-й среде отраженным и во 2-й среде преломленным, а следовательно и их огибающим — волне отраженной и преломленной. Пусть $\Pi_s(x, y, z, t) = 0$ — уравнение преломленной волны, перемещающейся во 2-й среде со скоростью

$$\omega_s = - \frac{\frac{\partial \Pi_s}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \Pi_s}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Pi_s}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Pi_s}{\partial z}\right)^2}}. \quad (67)$$

Наконец, обозначим через $\Pi_r(x, y, z, t) = 0$ уравнение отраженной волны, перемещающейся в 1-й среде со скоростью

$$\omega_r = - \frac{\frac{\partial \Pi_r}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \Pi_r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Pi_r}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Pi_r}{\partial z}\right)^2}}, \quad (68)$$

вообще в силу анизотропии сред отличной от ω_i . Чтобы отыскать связь падающей и преломленной волны, а также связь падающей и отраженной, иначе — законы преломления и отражения, достаточно потребовать, чтобы многообразие (66) являлось общим для поверхностей

$$\Pi_i(x, y, z, t) = 0, \quad \Pi_s(x, y, z, t) = 0, \quad \Phi(x, y, z, t) = 0,$$

с одной стороны, и для поверхностей

$$\Pi_i(x, y, z, t) = 0, \quad \Pi_r(x, y, z, t) = 0, \quad \Phi(x, y, z, t) = 0,$$

* См. [51], стр. 295 и [60] стр. 45—52.

с другой, т. е. достаточно потребовать выполнения условий совместности трех видов волн на поверхности раздела.

Дифференцируя $\Pi_i=0$, $\Pi_s=0$, $\Pi_r=0$, $\Phi=0$ вдоль многообразия (66) и составляя их разности, придем к следующим соотношениям совместности:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Pi_s}{\partial x} - \frac{\partial \Pi_i}{\partial x} &= \lambda_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x}, & \frac{\partial \Pi_r}{\partial x} - \frac{\partial \Pi_i}{\partial x} &= \lambda_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \\ \frac{\partial \Pi_s}{\partial y} - \frac{\partial \Pi_i}{\partial y} &= \lambda_1 \frac{\partial \Phi}{\partial y}, & \frac{\partial \Pi_r}{\partial y} - \frac{\partial \Pi_i}{\partial y} &= \lambda_2 \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \\ \frac{\partial \Pi_s}{\partial z} - \frac{\partial \Pi_i}{\partial z} &= \lambda_1 \frac{\partial \Phi}{\partial z}, & \frac{\partial \Pi_r}{\partial z} - \frac{\partial \Pi_i}{\partial z} &= \lambda_2 \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \\ \frac{\partial \Pi_s}{\partial t} - \frac{\partial \Pi_i}{\partial t} &= \lambda_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t}, & \frac{\partial \Pi_r}{\partial t} - \frac{\partial \Pi_i}{\partial t} &= \lambda_2 \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

где λ_1 , λ_2 — множители, зависящие от x , y , z , t . Обозначим через ψ_i , ψ_s и ψ_r соответственно углы падения, преломления и отражения, т. е. углы между положительным направлением нормали к поверхности раздела и положительными направлениями нормалей к поверхностям падающей, преломленной и отраженной волн.

После исключения множителей λ_1 , λ_2 и простых преобразований условий (69) получим следующие законы преломления и отражения:

$$\frac{\sin \psi_i}{\sin \psi_s} = \frac{\omega_i - \Omega \cos \psi_i}{\omega_s - \Omega \cos \psi_s}, \quad (70)$$

$$\frac{\sin \psi_i}{\sin \psi_r} = \frac{\omega_i - \Omega \cos \psi_i}{\omega_r - \Omega \cos \psi_r}, \quad (71)$$

где Ω , ω_i , ω_s , ω_r определяются выражениями (64), (65), (67), (68). В частном предположении $\Omega=0$, т. е. покоя поверхности раздела двух сред, получим классические законы Декарта.

Применим приведенные законы преломления и отражения в атмосфере, состояние которой задается распределением по высоте элементов u , v , w , s . Допустим, что атмосфера содержит плоскую, параллельную земной поверхности границу раздела двух различных ее состояний. Обозначим через u_1 , v_1 , w_1 , s_1 значения элементов u , v , w , s на поверхности раздела со стороны нижнего слоя атмосферы, а через u_2 , v_2 , w_2 , s_2 — значения тех же элементов на поверхности со стороны верхнего слоя. Предположение о разрыве u , v , w , s допускает, что поверхность раздела является поверхностью разрыва первого или нулевого порядка. Рассмотрим последовательно оба случая.

Допустим, что поверхность раздела, являясь поверхностью разрыва первого порядка, движется со скоростью $\Omega=w$. Как известно*, касательные составляющие скорости при переходе через поверхность меняются непрерывно, следовательно $u_1=u_2$, $v_1=v_2$; нормальные составляющие должны меняться разрывно, т. е. $w_1 \neq w_2$, и их разрыв связан с разрывным изменением плотности. Так как поверхность разрыва первого порядка не может быть стационарной, то $w \neq w_1$, $w \neq w_2$. Обозначим через θ_i , φ_i наклонение и азимут положительной нормали падающей волны, через θ_s , φ_s и, с другой стороны, через θ_r , φ_r — те же углы нормали преломленной и соответственно отраженной волны для некоторой точки, принадлежащей многообразию (66). Заметив, что нормали всех изучаемых волновых поверхностей в какой-нибудь точке (66) лежат в одной плоскости, нормальной к линии пересечения этих поверхностей в какой-нибудь момент времени, имеем

$$\varphi_i = \varphi_s = \varphi_r = \varphi_0. \quad (72)$$

* См. [57], стр. 296.

Кроме того, очевидно $\theta_i = \frac{\pi}{2} - \psi_i$, $\theta_s = \frac{\pi}{2} - \psi_s$, $\theta_r = \frac{\pi}{2} - \psi_r$. Тогда законы преломления (70) и отражения (71) могут быть переписаны следующим образом:

$$\frac{\cos \theta_i}{\omega_i - w \sin \theta_i} = \frac{\cos \theta_s}{\omega_s - w \sin \theta_s}, \quad (73)$$

$$\frac{\cos \theta_i}{\omega_i - w \sin \theta_i} = \frac{\cos \theta_r}{\omega_r - w \sin \theta_r}. \quad (74)$$

Пользуясь уравнениями (20) и (21), найдем выражение для скорости ω_i (65) в виде

$$\omega_i = u_1 \cos \theta_i \cos \varphi_i + v_1 \cos \theta_i \sin \varphi_i + w_1 \sin \theta_i + c_1. \quad (75)$$

Аналогично найдем выражения для скоростей преломленной и отраженной волн:

$$\omega_s = u_2 \cos \theta_s \cos \varphi_s + v_2 \cos \theta_s \sin \varphi_s + w_2 \sin \theta_s + c_2, \quad (76)$$

$$\omega_r = u_1 \cos \theta_r \cos \varphi_r + v_1 \cos \theta_r \sin \varphi_r + w_1 \sin \theta_r + c_1. \quad (77)$$

Внося выражения (75), (76), (77) в уравнения (73) и (74) и пользуясь замечанием (72) и условием непрерывности касательных составляющих скорости $u_1 = u_2$, $v_1 = v_2$ на границе раздела как поверхности разрыва первого порядка, приведем законы преломления и отражения окончательно к следующему виду:

$$\frac{c_1}{\cos \theta_i} + (w - w_1) \operatorname{tg} \theta_i = \frac{c_2}{\cos \theta_s} + (w_2 - w) \operatorname{tg} \theta_s, \quad (78)$$

$$\cos \theta_i = \cos \theta_r. \quad (79)$$

Полученные уравнения (78), (79) устанавливают зависимости углов наклона нормалей падающей волны и волн соответственно преломленной и отраженной. Для отраженного луча справедлив закон Декарта.

Рассмотрим элементарную волну Гюйгенса с источником в точке (x_0, y_0, z_0, t_0) , принадлежащей нижнему слою, и звуковой луч, определяемый значениями параметров θ_0 , φ_0 и имеющий своим началом источник (x_0, y_0, z_0, t_0) . Этот луч определяется уравнениями (38) и (37). Обозначая через $\Phi(z, t) = 0$ уравнение подвижной плоской поверхности раздела, о которой говорилось выше, и решая его совместно с последним, из системы (38) найдем момент $t = t_1$ достижения лучом этой поверхности раздела и высоту ее $z = z_1$. Очевидно, первые два из уравнений (38) определяют другие координаты $x = x_1$, $y = y_1$ точки, принадлежащей многообразию (66). Тогда угол наклона θ_i нормали падающей волны в точке (x_1, y_1, z_1, t_1) найдется из соотношения (37):

$$\frac{c_1}{\cos \theta_i} + U_1 + w_1 \operatorname{tg} \theta_i = m_0 = \frac{c_0}{\cos \theta_0} + U_0 + w_0 \operatorname{tg} \theta_0, \quad (37)$$

где $U = u_1 \cos \varphi_0 + v_1 \sin \varphi_0$. Внося значение θ_i в уравнения (78) и (79), найдем θ_s , θ_r , которые вместе с φ_0 дадут преломленный и отраженный звуковые лучи, принадлежащие элементарной преломленной и отраженной волнам, имеющим общий источник в точке (x_1, y_1, z_1, t_1) многообразия (66). Уравнения этих лучей, а также их исследование будут приведены в следующей главе.

Допустим теперь, что поверхность раздела $\Phi(z, t) = 0$, являясь поверхностью разрыва нулевого порядка, перемещается со скоростью $\Omega = w$. Известно, что нормальная составляющая скорости непрерывна при переходе через такую поверхность, т. е. $w_1 = w_2$, и наоборот, касательные составляющие разрывны, т. е. $u_1 \neq u_2$, $v_1 \neq v_2$. Кроме того, в силу стационарности такой поверхности, скорость ее перемещения $w = w_1 = w_2$. При принятых обозначениях уравнения (73) и (74) дадут следующие законы преломления и отражения:

$$\frac{c_1}{\cos \theta_i} + U_1 = \frac{c_2}{\cos \theta_s} + U_2, \quad (80)$$

$$\cos \theta_i = \cos \theta_r, \quad (81)$$

где

$$\begin{aligned} U_1 &= u_1 \cos \varphi_0 + v_1 \sin \varphi_0, \\ U_2 &= u_2 \cos \varphi_0 + v_2 \sin \varphi_0. \end{aligned}$$

Полученные уравнения позволяют, как и в предыдущем случае, отыскать преломленный и отраженный лучи, исходящие из точки встречи падающего луча с поверхностью раздела. Заметим, что в силу стационарности поверхности раздела в законы преломления и отражения не входит скорость перемещения самой поверхности — уравнения остаются теми же в предположении $w = w_1 = w_2 = 0$, т. е. в предположении наличия лишь горизонтальных токов в нижнем и верхнем слоях, примыкающих к покоящейся поверхности раздела. И в этом случае для отраженного луча справедлив закон Декарта. Уравнения преломленного и отраженного лучей дадим в следующей главе.

Сравнивая уравнения (73) и (74) с условием (37), устанавливающим изменение угла θ звукового луча, видим их тесную связь, переходящую в тождество при $w = 0$, т. е. при покоящейся поверхности раздела. Это и следовало ожидать, ибо условие (37) представляет закон преломления звукового луча в непрерывной среде, а следовательно условия (73) и (74) для поведения луча на границе раздела разрывно меняющихся состояний среды являются следствием условия (37) и могут быть получены вместе с (37) из принципа Ферма.

ГЛАВА ВТОРАЯ

§ 7

Рассмотрим точечный источник, помещенный на земной поверхности в начале системы координат (x, y, z) , связанной с Землей, и предположим, что источник посылает звуковой импульс в начальный момент времени $t_0 = 0$. В условиях непрерывного распределения элементов, характеризующих состояние атмосферы до прохождения в ней звуковой волны, конгруэнция звуковых лучей, имеющих началом точечный источник $x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0$, представится уравнениями

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \int_0^z \frac{c \cos \theta \cos \varphi_0 + u}{c \sin \theta + w} dz, \\ y_1 &= \int_0^z \frac{c \cos \theta \sin \varphi_0 + v}{c \sin \theta + w} dz, \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

в которых θ связано с переменным интегрирования уравнением

$$\frac{c}{\cos \theta} + U + w \operatorname{tg} \theta = \frac{c_0}{\cos \theta_0} + U_0 + w_0 \operatorname{tg} \theta_0 = m_0, \quad (83)$$

причем

$$\left. \begin{aligned} U &= u \cos \varphi_0 + v \sin \varphi_0, \\ U_0 &= u_0 \cos \varphi_0 + v_0 \sin \varphi_0. \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

Время пробега звукового луча до высоты z определяется по формуле

$$t_1 = \int_0^z \frac{dz}{c \sin \theta + w}. \quad (85)$$

Естественно считать на земной поверхности $w_0 = 0$ и вообще отличными от нуля горизонтальные составляющие u_0, v_0 . Тогда уравнение (83) упрощается:

$$\frac{c}{\cos \theta} + U + w \operatorname{tg} \theta = \frac{c_0}{\cos \theta_0} + U_0 = m_0. \quad (86)$$

Независимыми параметрами конгруэнции лучей являются наклонение θ_0 и азимут φ_0 произвольного направления из начала координат. Заметим, что m_0 , оставаясь положительной, растет неограниченно вместе с θ_0 , ибо очевидно, $c_0 > U_0$. Кроме того, вообще $c > U, c > w$.

Рассмотрим наряду с системой (x, y, z) другую систему координат (X, Y, z) , образованную из первой поворотом вокруг оси z на угол φ_0 . Обозначим горизонтальные составляющие ветра в направлении оси Y на высоте z и на уровне земной поверхности соответственно через

$$\left. \begin{aligned} V &= -u \sin \varphi_0 + v \cos \varphi_0, \\ V_0 &= -u_0 \sin \varphi_0 + v_0 \cos \varphi_0. \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

Преобразуем уравнения (82) к новой системе координат:

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \int_0^z \frac{c \cos \theta + U}{c \sin \theta + w} dz, \\ Y_1 &= \int_0^z \frac{V}{c \sin \theta + w} dz. \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

Уравнения (82), (85) или (88), (85) дают элементарную волну Гюйгенса. Какой-либо луч (θ_0, φ_0) ($0 \leq \theta_0 \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$) семейства (88) вообще является кривой двойкой кривизны. В частном случае спокойной атмосферы ($u = v = w = 0$) звуковой луч становится плоским:

$$\left. \begin{aligned} X &= \int_0^z \frac{dz}{\operatorname{tg} \theta} = \int_0^z \frac{c(z) dz}{\sqrt{m_0^2 - c^2(z)}}, \\ Y &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

где

$$m_0 = \frac{c_0}{\cos \theta_0}.$$

Время пробега такого луча определится уравнением

$$t = \int_0^z \frac{m_0 dz}{c(z) \sqrt{m_0^2 - c^2(z)}}. \quad (90)$$

Уравнения (89) и (90) известны как уравнения сейсмического луча и времени его пробега. Пользуясь соотношением (86), исключим из уравнений (88) и (85) переменное θ . Для этого найдем из (86)

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{-(m_0 - U)w \pm c \sqrt{(m_0 - U)^2 - (c^2 - w^2)}}{c^2 - w^2}. \quad (91)$$

Выбор одной из ветвей $\operatorname{tg} \theta$ в силу ее двузначности, обусловленной точкой разветвления, удовлетворяющей уравнению $(m_0 - U)^2 - (c^2 - w^2) = 0$, определяется положительным знаком $\operatorname{tg} \theta_0$ при $z = 0$. В самом деле, при $z = 0$ выражение (91) обращается в

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{\pm \sqrt{(m_0 - U)^2 - c^2}}{c_0}, \quad (91_1)$$

а так как θ_0 меняется, оставаясь в интервале $0 \leq \theta_0 \leq \frac{\pi}{2}$ в силу положения источника звукового импульса на земной поверхности, то следует выбрать знак плюс перед радикалом в (91) для значений z , принадлежащих интервалу, не содержащему точки ветвления. Очевидно для действительных значений θ

необходимо $m_0 - U \geq \sqrt{c^2 - w^2}$. Это требование выполняется для z достаточно близких $z=0$, ибо при $z=0$ имеем

$$m_0 - U = \frac{c_0}{\cos \theta_0} \geq c_0.$$

Следовательно, в окрестности $z=0$, $\operatorname{tg} \theta$ действителен, и кроме того, $\operatorname{tg} \theta > 0$ при $\theta_0 > 0$, что следует из очевидного неравенства $m_0 - U > c > \sqrt{c^2 - w^2}$ для z , близких к $z=0$. Наконец, $\operatorname{tg} \theta = 0$ для значений z , удовлетворяющих уравнению

$$m_0 - U - c = 0, \quad (92)$$

и становится отрицательным при

$$c > m_0 - U \geq \sqrt{c^2 - w^2}.$$

Принимая указанное определение функции $\operatorname{tg} \theta$, исключим θ из уравнений (88) и (85):

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \int_0^z \frac{c(c^2 - w^2) + cU(m_0 - U) - wU\sqrt{(m_0 - U)^2 - (c^2 - w^2)}}{(c^2 - w^2)\sqrt{(m_0 - U)^2 - (c^2 - w^2)}} dz, \\ Y_1 &= \int_0^z \frac{cV(m_0 - U) - wV\sqrt{(m_0 - U)^2 - (c^2 - w^2)}}{(c^2 - w^2)\sqrt{(m_0 - U)^2 - (c^2 - w^2)}} dz, \\ t_1 &= \int_0^z \frac{c(m_0 - U) - w\sqrt{(m_0 - U)^2 - (c^2 - w^2)}}{(c^2 - w^2)\sqrt{(m_0 - U)^2 - (c^2 - w^2)}} dz, \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

где U , V и m_0 определяются соотношениями (84), (87) и (86).

§ 8

Рассмотрим ход звукового луча (θ_0, φ_0) в некотором интервале изменения z , предполагая, что этот интервал не содержит точки разветвления, являющейся критической точкой подинтегральных выражений (93), т. е. предполагая выполнение неравенства $m_0 - U > \sqrt{c^2 - w^2}$, которое имеет место в окрестности $z=0$. Для этого составим производные от X_1 , Y_1 , t_1 из (93):

$$\left. \begin{aligned} \frac{dX_1}{dz} &= \frac{c \cos \theta + U}{c \sin \theta + w} = \frac{c(c^2 - w^2) + cU(m_0 - U) - wU\sqrt{(m_0 - U)^2 - (c^2 - w^2)}}{(c^2 - w^2)\sqrt{(m_0 - U)^2 - (c^2 - w^2)}}, \\ \frac{dY_1}{dz} &= \frac{V}{c \sin \theta + w} = \frac{V[c(m_0 - U) - w\sqrt{(m_0 - U)^2 - (c^2 - w^2)}]}{(c^2 - w^2)\sqrt{(m_0 - U)^2 - (c^2 - w^2)}}, \\ \frac{dt_1}{dz} &= \frac{1}{c \sin \theta + w} = \frac{c(m_0 - U) - w\sqrt{(m_0 - U)^2 - (c^2 - w^2)}}{(c^2 - w^2)\sqrt{(m_0 - U)^2 - (c^2 - w^2)}}. \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

В силу неравенства $c > w$ легко видеть, что $\frac{dt_1}{dz} > 0$ при ранее выбранном определении двузначной функции $\operatorname{tg} \theta$. Следовательно z растет со временем. Знак $\frac{dY_1}{dz}$ определяется только знаком V , ибо $\frac{dY_1}{dz} = V \frac{dt_1}{dz}$, т. е. уклонение луча в направлении оси Y от азимутальной плоскости $(X, 0, z)$ следует за знаком проекции горизонтальной составляющей ветра на ось Y .

Наконец, изучим знак $\frac{dX_1}{dz}$. Примем следующие верхние и нижние границы изменения U , w , c :

$$-60 \text{ м/сек} < U < 60 \text{ м/сек},$$

$$-5 \text{ м/сек} < w < 5 \text{ м/сек},$$

$$294 \text{ м/сек} < c < 374 \text{ м/сек}.$$

Границы скорости звука c отвечают верхней границе температуры в 60°C и нижней границе в -60°C . Проследим знак $\frac{dX_1}{dz}$ в зависимости от начального значения θ_0 , от которого $\frac{dX_1}{dz}$ зависит через входящее в правую часть m_0 . Полагая $\theta_0 = 0$ и внося в (94) $m_0 = c_0 + U_0$ из (86), пользуясь приведенными границами для U , w и c , найдем $\frac{dX_1}{dz} > 0$. Следовательно для лучей, соседних с $\theta_0 = 0$ и произвольного азимута φ_0 , X_1 растет вместе с z и с t_1 , т. е. звуковые лучи, выходя из источника при малых наклонениях к горизонту, поднимаются в атмосферу, удаляясь от источника. Легко предвидеть иное поведение лучей, близких к $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ — противоположное направление скорости ветра в выбранном азимуте изменит знак $\frac{dX_1}{dz}$. В самом деле, внося в правую часть первого из уравнений (94) выражение m_0 из (86) и полагая затем $\cos \theta_0 = 0$, получим

$$\frac{dX_1}{dz} = \frac{U}{c + w}.$$

Итак, для лучей, близких к лучу перпендикулярному, знак $\frac{dX_1}{dz}$ следует за знаком U , а следовательно звуковой луч, поднимаясь в атмосферу, удаляется от источника при $U > 0$ и начинает, наоборот, приближаться при изменении знака U .

Фиксируя z , составим производную по θ_0 от $\frac{dX_1}{dz}$.

$$\frac{\partial}{\partial \theta_0} \left(\frac{dX_1}{dz} \right) = - \frac{m_0 c}{[(m_0 - U)^2 - (c^2 - w^2)]^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial m_0}{\partial \theta_0}.$$

Так как $\frac{\partial m_0}{\partial \theta_0} = \frac{c_0 \sin \theta_0}{\cos^2 \theta_0} > 0$, то $\frac{\partial}{\partial \theta_0} \left(\frac{dX_1}{dz} \right) < 0$ независимо от знака U .

Соединяя сказанное о знаке $\frac{dX_1}{dz}$ при θ_0 , близких к 0 и $\frac{\pi}{2}$, можем сказать, что при $U > 0$, на произвольной высоте z во всем интервале $0 \leq \theta_0 \leq \frac{\pi}{2}$ сохраняется $\frac{dX_1}{dz} > 0$. Наоборот, при $U < 0$ с возрастанием θ_0 функция $\frac{dX_1}{dz}$, убывая от положительного значения при θ_0 , близких к нулю, один раз проходит через нуль при некотором значении θ_0' и принимает затем отрицательные значения. Значение θ_0' вообще зависит от z , но в силу неравенства $\frac{dX_1}{dz} > 0$ при θ_0 , близких к нулю, независимо от z найдется такое θ_0'' , что в интервале $0 \leq \theta_0 \leq \theta_0''$ будет $\frac{dX_1}{dz} > 0$ для всей области изменения z и при любом знаке U ; наоборот, вне этого интервала, т. е. при $\theta_0'' < \theta_0 \leq \frac{\pi}{2}$, знак $\frac{dX_1}{dz}$ может меняться.

§ 9

Выше мы сделали предположение, что интервал изменения z не содержит критической точки, удовлетворяющей уравнению $(m_0 - U)^2 - (c^2 - w^2) = 0$ или уравнению

II класс — звуковые лучи, для которых $\frac{dX_1}{dz} > 0$, — определяется значениями θ_0, φ_0 , принадлежащими области

$$0 \leq \theta_0 \leq \theta_0^*,$$

$$0 \leq \varphi_0 < 2\pi.$$

Рассмотрим II класс лучей. При выборе какого-нибудь φ_0 и $\theta_0 > 0$, принадлежащего области II класса, может оказаться, что $m_0 > \eta_1(z)$ при любом z , т. е. что кривая $\eta_1(z)$ лежит ниже прямой $b_0 T_0$ (фиг. 4), следовательно имеем вновь лучи 1-го типа, выходящие из источника под углом, отличным от нуля. В случае $\theta_0 = 0$ также может оказаться $m_0 = Oa_0 > \eta_1(z)$ для любого z , кроме $z = 0$, ибо при $z = 0$ и $\theta_0 = 0$ имеем $m_0 = \eta_1(0) = c_0 + U_0$. Обеспечивая сходимость интегралов (93) в последнем случае предположением $\left(\frac{d\eta_1}{dz}\right)_{z=0} \neq 0$, будем иметь луч 1-го типа, выходящий из источника, касаясь горизонтальной плоскости.

Но может случиться, что прямая $b_0 T_0$ пересечет кривую $\eta_1(z)$ в одной или нескольких точках, или будет соприкасаться с ней. Разберем отдельно эти случаи.

Допустим, что прямая $b_0 T_0$ пересекает кривую $\eta_1(z)$ в первой точке b_{h_1} ($z = h_1$) так, что

$$\left(\frac{d\eta_1}{dz}\right)_{z=h_1} \neq 0. \quad (96)$$

Область интегрирования в правых частях формул (93) очевидно $(0, h_1)$. Следовательно звуковой луч поднимется до высоты h_1 и соединит собой начало координат с вершиной (X_{h_1}, Y_{h_1}, h_1) , где

$$\left. \begin{aligned} X_{h_1} &= \int_0^{h_1} \frac{c(c^2 - w^2) + cU(m_0 - U) - wU \sqrt{(m_0 - U)^2 - (c^2 - w^2)}}{(c^2 - w^2) \sqrt{(m_0 - U)^2 - (c^2 - w^2)}} dz, \\ Y_{h_1} &= \int_0^{h_1} \frac{cV(m_0 - U) - wV \sqrt{(m_0 - U)^2 - (c^2 - w^2)}}{(c^2 - w^2) \sqrt{(m_0 - U)^2 - (c^2 - w^2)}} dz. \end{aligned} \right\} \quad (97)$$

Время пробега этого луча оценится так:

$$t_{h_1} = \int_0^{h_1} \frac{c(m_0 - U) - w \sqrt{(m_0 - U)^2 - (c^2 - w^2)}}{(c^2 - w^2) \sqrt{(m_0 - U)^2 - (c^2 - w^2)}} dz. \quad (98)$$

Знаменатель подинтегральных функций (97) и (98) стремится к нулю вместе с $(h_1 - z)$ и, в силу предположения $\left(\frac{d\eta_1}{dz}\right)_{z=h_1} \neq 0$, имеет порядок $(h_1 - z)^{\frac{1}{2}}$, а следовательно интегралы (97) и (98) сходятся.

Рассматривая изменение $\operatorname{tg} \theta$ (91), замечаем, что, когда переменная интегрирования z в (97) и (98) достигает критического значения $z = h_1$, $\operatorname{tg} \theta$ принимает в этой точке разветвления значение

$$\operatorname{tg} \theta_{h_1} = -\frac{(m_0 - U)w}{c^2 - w^2} \neq 0, \text{ при } w(h_1) \neq 0. \quad (99)$$

Дальнейшее изменение θ определится второй ветвью:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{-(m_0 - U)w - c \sqrt{(m_0 - U)^2 - (c^2 - w^2)}}{c^2 - w^2}. \quad (100)$$

Внося (100) в уравнения (88) и (85), найдем уравнения ниспадающей ветви звукового луча:

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= X_{h_1} + \int_{z_1}^{h_1} \frac{c(c^2 - w^2) + cU(m_0 - U) + wU \sqrt{(m_0 - U)^2 - (c^2 - w^2)}}{(c^2 - w^2) \sqrt{(m_0 - U)^2 - (c^2 - w^2)}} dz, \\ Y_1 &= Y_{h_1} + \int_{z_1}^{h_1} \frac{cV(m_0 - U) + wV \sqrt{(m_0 - U)^2 - (c^2 - w^2)}}{(c^2 - w^2) \sqrt{(m_0 - U)^2 - (c^2 - w^2)}} dz, \\ t_1 &= t_{h_1} + \int_{z_1}^{h_1} \frac{c(m_0 - U) + w \sqrt{(m_0 - U)^2 - (c^2 - w^2)}}{(c^2 - w^2) \sqrt{(m_0 - U)^2 - (c^2 - w^2)}} dz. \end{aligned} \right\} \quad (101)$$

По соображениям, приведенным ранее, легко видеть, что $\frac{dt_1}{dz} < 0$, $\frac{dX_1}{dz} < 0$. Второе условие показывает, что абсцисса X_1 в нисходящей ветви луча продолжает расти. Сравнивая (101) с (93), находим, что в силу наличия вертикального тока $w \neq 0$ в атмосфере восходящая и нисходящая ветви не являются симметричными, тогда как при наличии одних лишь горизонтальных токов ($w \equiv 0$) эти ветви имеют вертикаль, проходящую через вершину луча в качестве оси симметрии.

Выше было отмечено, что $\operatorname{tg} \theta_{h_1} \neq 0$ на вершине луча, т. е. нормаль к фронту волны составляет с горизонтом угол, отличный от нуля лишь в случае наличия вертикальной составляющей ветра. Естественно ожидать, что условием обращения угла θ в нуль явится условие (92), в которое переходит уравнение (95), определяющее критическое значение $z = h_1$, при отсутствии вертикальной составляющей ветра. Из выражений (91) и (99) непосредственно видно, что при $w > 0$ нормаль к фронту волны становится горизонтальной на восходящей ветви луча и, обратно, при $w < 0$ — на нисходящей ветви. Очевидно касательная к лучу в точке $z = h_1$ имеет направление, параллельное горизонтальной плоскости.

Таким образом, при выполнении на некоторой высоте $z = h_1$ необходимых и достаточных условий (95)

$$m_0 = \eta_1(h_1) = U(h_1) + \sqrt{c^2(h_1) - w^2(h_1)}$$

и (96)

$$\left(\frac{d\eta_1}{dz} \right)_{z=h_1} \neq 0$$

звуковой луч (θ_0, φ_0) , выйдя из источника, подымается до высоты $z = h_1$, касаясь плоскости $z = h_1$, и затем вновь возвращается на земную поверхность в точку с координатами

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= 2 \int_0^{h_1} \frac{c(c^2 - w^2) + cU(m_0 - U)}{(c^2 - w^2) \sqrt{(m_0 - U)^2 - (c^2 - w^2)}} dz, \\ H_1 &= 2 \int_0^{h_1} \frac{cV(m_0 - U)}{(c^2 - w^2) \sqrt{(m_0 - U)^2 - (c^2 - w^2)}} dz. \end{aligned} \right\} \quad (102)$$

Полное время пробега такого луча определится формулой

$$\tau_1 = 2 \int_0^{h_1} \frac{c(m_0 - U)}{(c^2 - w^2) \sqrt{(m_0 - U)^2 - (c^2 - w^2)}} dz. \quad (103)$$

Назовем подобный луч, по классификации Гальбрена*, лучом 2-го типа.

Условие (95) требует, чтобы функция

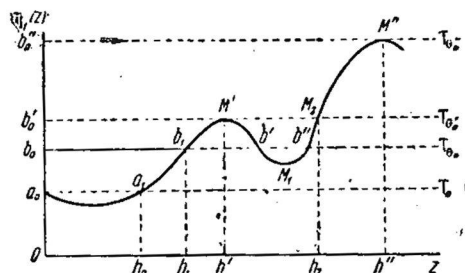
$$\eta_1(z) = U(z) + \sqrt{c^2(z) - w^2(z)}$$

достигла на высоте $z = h_1$ значения $m_0 = \frac{c_0}{\cos \theta_0} + U_0$, определяемого начальными значениями наклона θ_0 , азимута φ_0 и состоянием атмосферы в приземном слое.

Очень многими наблюдениями установлено, что в тропосфере температура, а потому и скорость звука $c(z)$ падает с высотой; следовательно, для того чтобы объяснить возвращение звукового луча на земную поверхность, необходимо допустить согласно с условием (95) рост функции $\eta_1(z)$ после ее падения, вызванного убыванием $c(z)$ в тропосфере. Как видно, частичную компенсацию роста вносит ветровая функция $U(z)$ в тех азимутах, где $U(z) > 0$, и наоборот, ветер затрудняет возвращение звукового луча на землю в противоположных азимутах, т. е. где $U(z) < 0$. Что же касается влияния вертикальной составляющей, то составляющая w независимо от ее знака всегда является декомпенсирующим фактором в росте скорости звука $c(z)$ и горизонтальной составляющей ветра $U(z)$ для объяснения условий возврата лучей на земную поверхность.

Мы рассмотрели ход звукового луча (θ_0, φ_0) , для которого на высоте $z = h_1$ выполнены необходимые и достаточные условия (95) и (96) его возвращения на земную поверхность. Выше было отмечено, что требования действительности значений $\tan \theta$ (91), а также X_1, Y_1, t_1 (93), следовательно самая возможность возникновения звукового луча (θ_0, φ_0) налагает ограничение на функцию $\eta_1(z)$ в виде выполнения неравенства $m_0 \geq \eta_1(z)$ и притом в односвязной области изменения z . Следовательно для лучей 2-го типа имеет смысл интервал изменения z от $z = 0$ до $z = h_1$ (фиг. 5), первой точки пересечения прямой $b_0 T_0$ с кривой $\eta_1(z)$; положение последующих точек пересечения $b', b'', \dots$ не окажет влияния на ход звукового луча. Таким образом, определяющее влияние на поведение лучей окажет не вся кривая $\eta_1(z)$, а лишь ее участки $(a_1 b_1 M')$, $(M_2 M'')$, ..., т. е. та ветвь вообще многозначной функции $z(\eta_1)$ — обратной функции $\eta_1(z)$, в которой z является наименьшим для данного η_0 , а следовательно m_0 . Из сказанного следует, что точки минимума $\eta_1(z)$ (например M_1) могут быть исключены из изучения, кроме точки a_0 , в которой может оказаться $\left(\frac{d\eta_1}{dz}\right)_{z=0} = 0$ и $\left(\frac{d^2\eta_1}{dz^2}\right)_{z=0} > 0$.

Допустим теперь, что прямая $b'_0 T'_0$ коснется кривой $\eta_1(z)$ в точке M' , так что $\left(\frac{d\eta_1}{dz}\right)_{z=h'} = 0$ и $\left(\frac{d^2\eta_1}{dz^2}\right)_{z=h'} < 0$. В этом случае знаменатель подинтегральных функций (97) и (98) стремится к нулю вместе с $(h' - z)$, и в силу принятых условий для производной $\eta_1(z)$ в точке M' , интегралы (97) и (98) расходятся.



Фиг. 5

* См. [50], стр. 132—146.

Это показывает, что по мере подъема луча и приближения его к высоте $z=h'$ координаты X_1 , Y_1 его возврата и время его пробега t_1 неограниченно возрастают, а потому такой луч асимптотически приближается к плоскости $z=h'$. Его проекция на горизонтальную плоскость также имеет асимптоту с угловым коэффициентом

$$\left(\frac{dY_1}{dX_1}\right)_{z=h'} = \left[\frac{V}{U + c \sqrt{1 - \left(\frac{w}{c}\right)^2}} \right]_{z=h'}$$

К тому же результату придем, если кривая $\eta_1(z)$ будет касаться прямой m_0 в точке a_0 , т. е. при $z=0$, при существенном условии $\left(\frac{d^2\eta_1}{dz^2}\right)_{z=0} < 0$. В этом случае интегралы (93) расходятся при каком угодно малом значении z , следовательно звуковой луч окажется прямой, выходящей из источника и стекущей по земной поверхности под углом α к оси X :

$$\operatorname{tg} \alpha = \left(\frac{dY_1}{dX_1}\right)_{z=0} = \frac{V_0}{c_0 + U_0}.$$

Назовем такие лучи с бесконечными ветвями лучами 3-го типа.

Наконец, в случае касания $\eta_1(z)$ прямой m_0 в точке a_0 при условии $\left(\frac{d^2\eta_1}{dz^2}\right)_{z=0} > 0$, т. е. если кривая $\eta_1(z)$, выходя из a_0 , касается горизонтальной прямой, проведенной через a_0 , и подымается при $z > 0$ и смежных с $z=0$, интегралы (97) и (98) при $h_1 \rightarrow 0$ остаются конечными и определяют предельные значения координат возврата лучей 2-го типа $\theta_0 \rightarrow 0$ и время его пробега.

Таким образом, возникновение звукового луча того или иного типа всецело обязано поведению функции $\eta_1(z)$, которую мы предполагаем непрерывной с такими же производными до потребного порядка. Совершенно естественно, что особенности в лучах и их распределении обязаны особенностям хода с высотой кривой „состояния“. Мы ограничились здесь рассмотрением элементарных особенностей (точки максимума). Без труда можно было бы рассмотреть влияние на ход луча точек соприкосновения кривой $\eta_1(z)$ высших порядков, однако это будет носить теоретический характер, мало пригодный для целей собственно звукометрических. Влияние разрывов в ходе функции $\eta_1(z)$ рассмотрим позднее.

Опираясь на приведенную классификацию лучей, для хода функции $\eta_1(z)$, изображенной на фиг. 5, имеем следующие типы лучей:

- 1) лучи наклонений $0 \leq \theta_0 < \theta'_0$, являются лучами 2-го типа, зондирующими атмосферу на высотах $h_0 \leq h < h'$;
- 2) луч наклонения θ'_0 , является предельным лучом 3-го типа лучей $\theta_0 < \theta'_0$, асимптотически приближающимся к слою высоты $z=h'$;
- 3) лучи, наклонений $\theta'_0 < \theta_0 \leq \theta''_0$, являются вновь лучами 2-го типа, которые зондируют высоты $h_2 < z < h''$.

При $\theta_0 > \theta'_0$ и $\theta_0 \rightarrow \theta'_0$ лучи 2-го типа имеют пределом луч 3-го типа $\theta_0 = \theta'_0$, асимптотически приближающийся к слою высоты $z=h_2$.

Уже из этого примера мы видим, что атмосфера на высотах $0 < h < h_0$ и $h' < h < h_2$ вовсе не отражает лучей 2-го типа, а тем самым мы лишены об этих слоях „сведений, приносимых звуковыми лучами“. Следовательно всякое нарушение роста функции $\eta_1(z)$ с высотой в каком-либо слое исключает образование лучей 2-го типа, зондирующих высоты в слое нарушения роста $\eta_1(z)$.

Подведя итог проведенному анализу лучей I и II классов, мы видим, что из существующих лучей лишь лучи 2-го типа представляют наибольший интерес с точки зрения звукометрии. Ибо эти лучи, зондируя атмосферу до определенной высоты, вновь возвращаются на земную поверхность на конечном удалении от источника и за конечный промежуток времени.

§ 10

В силу затухания звуковых лучей в атмосфере из лучей 2-го типа представляют интерес очевидно лишь лучи, возвращающиеся на земную поверхность на относительно небольших расстояниях от источника. Следовательно из лучей 2-го типа нужно отобрать лучи, координаты точек возврата которых имеют те или иные верхние границы, зависящие от степени чувствительности приборов, улавливающих звуковой импульс. Налагая верхние границы на координаты Ξ_1 , H_1 (102) и на время пробега τ_1 (103), мы тем самым выделяем из атмосферы слои, отражающие лучи на ограниченные расстояния, т. е. из области изменения z функции $\eta_1(z)$ выделяем те интервалы, в которых не только существуют корни $\eta_1'(z)=0$, но в которых существует положительное $\mu < \eta_1'(z)$.

Так, например, для атмосферы, которая зондируется звуковыми лучами в некотором азимуте φ_0 и „состояние“ которой может быть охарактеризовано ходом функции $\eta_1(z)$, изображенной на фиг. 6, с указанной точки зрения представляют интерес интервалы $(0, h_3)$, (h_2, h_1) , в которых $\eta_1'(z) > \mu$ и Ξ_1 , H_1 , τ_1 лежат в принятых границах. Расширение границы первого интервала вверх и второго интервала вниз влечет за собой неограниченное увеличение значений Ξ_1 , H_1 , τ_1 , ибо при приближении $m_0 \rightarrow m_0'$ снизу или сверху, т. е. при $h_3 \rightarrow h_2'$ или $h_2 \rightarrow h_2'$, интегралы (102) и (103) расходятся, и лучи 2-го типа переходят в предельные лучи 3-го типа, асимптотически приближающиеся своими бесконечными ветвями соответственно к плоскостям $z = h_3'$ и $z = h_2' > h_3'$.

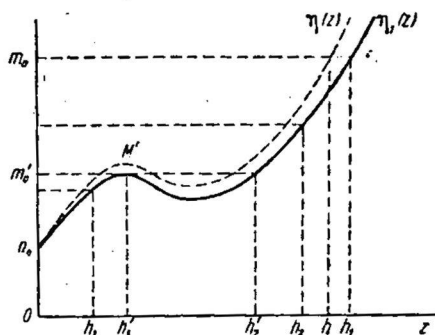
При определении координат Ξ_1 , H_1 и времени пробега τ_1 были установлены условия (95) и (96) возвращения луча на земную поверхность. В условии (95) $m_0 = \eta_1(h_1)$, где

$$\eta_1(h_1) = U(h_1) + c(h_1) \sqrt{1 - \left[\frac{w(h_1)}{c(h_1)} \right]^2},$$

входит значение вертикальной составляющей $w(h_1)$ на высоте h_1 в виде отношения $\frac{w(h_1)}{c(h_1)}$, которое, в силу принятых границ для $w(z)$ и $c(z)$, достаточно мало: $\frac{w}{c} < 0,0015$.

Оценим влияние $\left| \frac{w}{c} \right|$ на отклонения координат возврата лучей и времени их пробега для атмосферы, в которой вертикальная составляющая $w \equiv 0$. Для этого рассмотрим наряду с функцией $\eta_1(z) = U(z) + c(z) \sqrt{1 - \frac{w^2(z)}{c^2(z)}}$

иную функцию $\eta(z) = U(z) + c(z)$, характеризующую состояние атмосферы скоростью звука $c(z)$ и распределением лишь горизонтальной составляющей ветра $U(z)$ (фиг. 6). Погрешность от отбрасывания w в оценке $\eta_1(z)$ определится разностью $\eta(z) - \eta_1(z) = \varepsilon(z) > 0$. Относительная погрешность в оценке $m_0 = \eta_1(h_1)$, в силу принятых границ изменения $w(z)$ и $c(z)$, не может превзойти 0,02%.



Фиг. 6

Рассмотрим теперь какой-нибудь луч 2-го типа (θ_0, φ_0) , зондирующий атмосферу до высоты h_1 , и сравним координаты возврата этого луча с координатами того же луча, распространяющегося в атмосфере с теми же распределениями в ней $c(z)$ и $U(z)$, но в которой $w \equiv 0$ (фиг. 6), т. е. в которой состояние характеризуется функцией $\eta(z)$. Такой луч (θ_0, φ_0) достигнет высоты $h < h_1$. Разлагая $\eta_1(z)$ в интервале $h < z < h_1$ в ряд и ограничиваясь первым членом разложения, получим

$$\eta_1(h_1) - \eta_1(h) = \eta(h) - \eta_1(h) = \varepsilon(h) = (h_1 - h)\eta_1'(h'), \text{ где } h < h' < h_1,$$

и $\eta_1' > \mu > 0$ в интервале $h < z < h_1$. Отсюда $h_1 - h = \frac{\varepsilon(h)}{\eta_1'(h')} < \frac{E}{\mu}$, где E — верхняя граница функции

$$\varepsilon(z) = \eta(z) - \eta_1(z) = c(z) - \sqrt{c^2(z) - w^2(z)} < E = 0,045 \text{ м/сек.}$$

и μ — нижняя граница $\eta_1'(z)$.

Составим разность координат Ξ_1 (102) возврата луча при учете вертикальной составляющей w и координаты Ξ , полагая $w \equiv 0$. Обозначая эту разность через Δ_Ξ , будем иметь

$$\Delta_\Xi = \int_0^h \left\{ \frac{F_1(z, m_0)}{\sqrt{m_0 - \eta_1(z)}} - \frac{F(z, m_0)}{\sqrt{m_0 - \eta_1(z) - \varepsilon(z)}} \right\} dz + \int_h^{h_1} \frac{F_1(z, m_0)}{\sqrt{m_0 - \eta_1(z)}} dz,$$

где

$$F_1(z, m_0) = 2 \frac{c(c^2 - w^2) + cU(m_0 - U)}{(c^2 - w^2)\sqrt{m_0 - \eta_1(z) + 2c(z) - 2\varepsilon(z)}} > 0,$$

$$F(z, m_0) = 2 \frac{c^2 + U(m_0 - U)}{c\sqrt{m_0 - \eta_1(z) + 2c(z) - \varepsilon(z)}} > 0.$$

Представим подинтегральную функцию A первого интеграла в виде

$$\begin{aligned} A < \frac{1}{\sqrt{m_0 - \eta_1(z)}} [F_1(z, m_0) - F(z, m_0)] = \frac{1}{\sqrt{m_0 - \eta_1(z)}} \left[2c \left(\frac{1}{\sqrt{m_0 - \eta_1 + 2c - 2\varepsilon}} - \frac{1}{\sqrt{m_0 - \eta_1 + 2c - \varepsilon}} \right) + 2cU(m_0 - U) \left(\frac{1}{(c^2 - w^2)\sqrt{m_0 - \eta_1 + 2c - 2\varepsilon}} - \frac{1}{c^2\sqrt{m_0 - \eta_1 + 2c - \varepsilon}} \right) \right] = \\ = \frac{1}{\sqrt{m_0 - \eta_1}} \left\{ \left[\frac{c\varepsilon}{(m_0 - \eta_1 + 2c)^{\frac{3}{2}}} + \frac{9c\varepsilon^2}{4(m_0 - \eta_1 + 2c)^{\frac{5}{2}}} + \frac{35c\varepsilon^3}{8(m_0 - \eta_1 + 2c)^{\frac{7}{2}}} + \dots \right] + \frac{2cU(m_0 - U)}{(c^2 - w^2)(m_0 - \eta_1 + 2c)^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{w^2}{c^2} + \frac{\varepsilon}{m_0 - \eta_1 + 2c} + \frac{3\varepsilon^2}{2(m_0 - \eta_1 + 2c)^2} + \frac{5\varepsilon^3}{2(m_0 - \eta_1 + 2c)^3} + \dots \right] - \frac{U(m_0 - U)}{c(m_0 - \eta_1 + 2c)^{\frac{3}{2}}} \left[\varepsilon + \frac{3\varepsilon^2}{4(m_0 - \eta_1 + 2c)} + \frac{5\varepsilon^3}{8(m_0 - \eta_1 + 2c)^2} + \dots \right] \right\}. \end{aligned}$$

Замечая, что $\frac{w^2}{c^2} = \frac{2\varepsilon}{c} - \frac{\varepsilon^2}{c^2}$, при дальнейшем преобразовании A будем иметь

$$A < \frac{f_1(z, m_0)}{\sqrt{m_0 - \eta_1(z)}} \varepsilon + \frac{f_2(z, m_0)}{\sqrt{m_0 - \eta_1(z)}} \varepsilon^2 + \frac{f_3(z, m_0)}{\sqrt{m_0 - \eta_1(z)}} \varepsilon^3 + \dots,$$

где

$$f_1(z, m_0) = \frac{c}{(m_0 - \eta_1 + 2c)^{\frac{3}{2}}} \left[1 + \frac{U(m_0 - U) [4c(m_0 - \eta_1 + 2c) + c^2 + w^2]}{c^2(c^2 - w^2)} \right],$$

$$f_2(z, m_0) = \frac{c}{4(m_0 - \eta_1 + 2c)^{\frac{5}{2}}} \left[9 + \frac{U(m_0 - U) [-8(m_0 - \eta_1 + 2c)^2 + 9c^2 + 5w^2]}{c^2(c^2 - w^2)} \right],$$

$$f_3(z, m_0) = \frac{c}{8(m_0 - \eta_1 + 2c)^{\frac{7}{2}}} \left[35 + \frac{U(m_0 - U) (35c^2 + 5w^2)}{c^2(c^2 - w^2)} \right],$$

Легко видеть, что $\sqrt{m_0 - \eta_1(z)} > \sqrt{m_0 - \eta_1(h)} = \sqrt{s}$, а следовательно

$$A < f_1(z, m_0) \varepsilon^{\frac{1}{2}} + f_2(z, m_0) \varepsilon^{\frac{3}{2}} + f_3(z, m_0) \varepsilon^{\frac{5}{2}} + \dots$$

Обозначая верхние границы модулей $f_1(z, m_0)$, $f_2(z, m_0)$, $f_3(z, m_0)$, ... соответственно через f_1^* , f_2^* , f_3^* , ... первое слагаемое разности Δ_ξ оценим так:

$$\int_0^h A dz < f_1^* h E^{\frac{1}{2}} + f_2^* h E^{\frac{3}{2}} + f_3^* h E^{\frac{5}{2}} + \dots,$$

где E — верхняя граница s .

Для оценки второго слагаемого Δ_ξ разложим $m_0 - \eta_1(z)$ в интервале (h, h_1) в ряд и, ограничиваясь первым членом разложения, напомним для второго слагаемого следующее неравенство:

$$\int_h^{h_1} \frac{F_1(z, m_0)}{\sqrt{m_0 - \eta_1(z)}} dz < \frac{2F_1^* \sqrt{h_1 - h}}{\sqrt{\mu}},$$

где F_1^* — верхняя граница функции $F_1(z, m_0)$ в интервале (h, h_1) .

Пользуясь приведенным выше неравенством $h_1 - h < \frac{E}{\mu}$, получим следующее неравенство, оценивающее погрешность Δ_ξ :

$$\Delta_\xi < \left(f_1^* h + \frac{2F_1^*}{\mu} \right) E^{\frac{1}{2}} + f_2^* h E^{\frac{3}{2}} + f_3^* h E^{\frac{5}{2}} + \dots$$

Пользуясь принятыми выше границами переменных c , U , w , входящих в $F_1(z, m_0)$, $f_1(z, m_0)$, $f_2(z, m_0)$, $f_3(z, m_0)$, ..., нетрудно подсчитать значения F_1^* , f_1^* , f_2^* , f_3^* , ...:

$$F_1^* = 30; f_1^* = 0,095; f_2^* = 0,0001; f_3^* = 0,000005; \dots$$

Из выражений $f_1(z, m_0)$, $f_2(z, m_0)$, $f_3(z, m_0)$, ... непосредственно видно, что последовательность f_1^* , f_2^* , f_3^* , ... чрезвычайно быстро убывает, а следовательно, в силу малости $E < 1$, ряд в правой части Δ_ξ быстро сходится. Принимая наибольшую высоту h зондирования звуковым лучом атмосферы в $h = 50$ км, первые слагаемые правой части Δ_ξ оценятся так:

$$\left(f_1^* h + \frac{2F_1^*}{\mu} \right) E^{\frac{1}{2}} = \left(1007 + \frac{12,7}{\mu} \right) \text{ м}$$

$$f_2^* h E^{\frac{3}{2}} = 0,05 \text{ м}$$

$$f_3^* h E^{\frac{5}{2}} = 0,0001 \text{ м.}$$

Таким образом, ошибка $\Delta \xi$ может быть оценена первым слагаемым, зависящим от μ — нижней границы градиента $\eta_1'(z)$ в смежности с высотой $z=h$ зондирования. Принимая дальность возвращения звукового луча от источника во внешнюю зону за 150 км и значение* градиента $\mu = 0,0035 \frac{1}{\text{сек}}$, ошибка $\Delta \xi$ оценится в $3,4\%$, причем доля ошибки, обязанная малости μ , составляет $2,4\%$, тогда как ошибка от хода луча в слое $(0, h)$ оценивается в 1% . Естественно ожидать сильное расхождение сравниваемых лучей при малых значениях μ , т. е. при η_1' , близких к нулю, ибо в последнем случае лучи возвращаются на неограниченных удалениях от источника.

Аналогично составим разность $\Delta \tau$ времени пробега τ (103), учитывая вертикальную составляющую w и времени пробега луча в атмосфере, в которой, оставляя те же распределения c и U , положено $w \equiv 0$:

$$\Delta \tau = \int_0^h \left[\frac{\Phi_1(z, m_0)}{\sqrt{m_0 - \eta_1(z)}} - \frac{\Phi(z, m_0)}{\sqrt{m_0 - \eta_1(z) - \varepsilon(z)}} \right] dz + \int_h^{h_1} \frac{\Phi_1(z, m_0)}{\sqrt{m_0 - \eta_1(z)}} dz,$$

где

$$\Phi_1(z, m_0) = 2 \frac{c(m_0 - U)}{(c^2 - w^2) \sqrt{m_0 - \eta_1(z) + 2c(z) - 2\varepsilon(z)}} > 0,$$

$$\Phi(z, m_0) = 2 \frac{m_0 - U}{c \sqrt{m_0 - \eta_1(z) + 2c(z) - \varepsilon(z)}} > 0.$$

Разлагая $\Phi_1(z, m_0)$ и $\Phi(z, m_0)$ по параметру ε в первом интервале и $m_0 - \eta_1(z)$ в знаменателе второго слагаемого, получим, аналогично оценке $\Delta \xi$, следующее неравенство, оценивающее искомую погрешность $\Delta \tau$:

$$\Delta \tau < \left(\varphi_1^* h + \frac{2\Phi_1^*}{\mu} \right) E^{\frac{1}{2}} + \varphi_2^* h E^{\frac{3}{2}} + \varphi_3^* h E^{\frac{5}{2}} + \dots,$$

где Φ_1^* — верхняя граница $\Phi_1(z, m_0)$ в интервале (h, h_1) , $\varphi_1^*, \varphi_2^*, \varphi_3^*, \dots$ — верхние границы следующих выражений в интервале $(0, h_1)$:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{(m_0 - U)[4c(m_0 - \eta_1 + 2c) + c^2 + w^2]}{c(c^2 - w^2)(m_0 - \eta_1 + 2c)^{\frac{3}{2}}}, \\ \varphi_2 &= \frac{(m_0 - U)[9c^2 + 3w^2 - 8(m_0 - \eta_1 + 2c)^2]}{4c(c^2 - w^2)(m_0 - \eta_1 + 2c)^{\frac{5}{2}}}, \\ \varphi_3 &= \frac{(m_0 - U)(35c^2 + 5w^2)}{8c(c^2 - w^2)(m_0 - \eta_1 + 2c)^{\frac{7}{2}}}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Беря те же границы для изменения c, U, w , то же значение для высоты зондирования h и значение градиента $\mu = 0,0035 \frac{1}{\text{сек}}$, можно непосредственно убедиться в быстрой сходимости ряда, оценивающего $\Delta \tau$, и оценить отклонение $\Delta \tau$ в $3,5\%$, принимая за среднее время пробега звукового луча время пробега расстояния в 150 км со средней скоростью в 290 м/сек. распространения звуковой волны во внешней зоне. Большой процент отклонения $\Delta \tau$ обязан, как и в отклонении $\Delta \xi$, малому значению градиента μ . Надо полагать,

* См. [28], стр. 141.

что в действительности отклонения $\Delta \xi$ и $\Delta \tau$ будут значительно меньше в силу более узких границ изменения переменных, определяющих состояние атмосферы, и значительных значений градиента $\eta'_1(z)$ в смежности со слоем, отражающим звуковые лучи.

Приведенная оценка погрешностей $\Delta \xi$ и $\Delta \tau$ при пренебрежении вертикальными токами в атмосфере показывает на допустимость для целей звукометрии охарактеризовать состояние атмосферы распределением скорости $c(z)$ и двух горизонтальных составляющих $u(z)$ и $v(z)$ скорости ветра. Во всем дальнейшем мы будем рассматривать задачу в этом последнем предположении о состоянии атмосферы.

Координаты возврата луча и время пробега примут следующее выражение:

$$\left. \begin{aligned} \Xi &= 2X_h = 2 \int_0^h \frac{c \cos \theta + U}{c \sin \theta} dz = 2 \int_0^h \frac{c^2 + U(m_0 - U)}{c \sqrt{(m_0 - U)^2 - c^2}} dz, \\ H &= 2Y_h = 2 \int_0^h \frac{V}{c \sin \theta} dz = 2 \int_0^h \frac{V(m_0 - U)}{c \sqrt{(m_0 - U)^2 - c^2}} dz, \end{aligned} \right\} \quad (104)$$

$$\tau = 2t_h = 2 \int_0^h \frac{dz}{c \sin \theta} = 2 \int_0^h \frac{m_0 - U}{c \sqrt{(m_0 - U)^2 - c^2}} dz, \quad (105)$$

где θ связано с переменной интегрирования z уравнением

$$\frac{c(z)}{\cos \theta} + U(z) = \frac{c_0}{\cos \theta_0} + U_0 = m_0. \quad (106)$$

Необходимыми и достаточными условиями возвращения луча на земную поверхность являются

$$m_0 = \eta(h) = c(h) + U(h), \quad (107)$$

$$\left(\frac{d\eta}{dz} \right)_{z=h} \neq 0. \quad (108)$$

Уравнение (107) определяет высоту h зондирования атмосферы лучом (θ_0, φ_0) .

В первоначальной системе координат (x, y, z) координаты возврата звукового луча на земную поверхность имеют выражения

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \Xi \cos \varphi_0 - H \sin \varphi_0 = 2 \int_0^h \frac{c \cos \theta \cos \varphi_0 + u}{c \sin \theta} dz, \\ \eta &= \Xi \sin \varphi_0 + H \cos \varphi_0 = 2 \int_0^h \frac{c \cos \theta \sin \varphi_0 + v}{c \sin \theta} dz, \end{aligned} \right\} \quad (109)$$

где θ определяется из (106) и h — из (107). В частном случае, для спокойной атмосферы имеем следующие координаты возврата луча и время его пробега:

$$\left. \begin{aligned} \Xi &= 2 \int_0^h \frac{c(z) dz}{\sqrt{c^2(h) - c^2(z)}}, \\ H &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (104_1)$$

$$\tau = 2c(h) \int_0^h \frac{dz}{c(z) \sqrt{c^2(h) - c^2(z)}}. \quad (105_1)$$

Последние уравнения (104₁) и (105₁) дают известные в сейсмометрии уравнения сейсмического годографа в параметрической форме. Соотношение (106) для спокойной атмосферы дает известное предложение Бенндорфа* для угла выхода сейсмической радиации

$$\cos \theta_0 = \frac{c_0}{c(h)}.$$

Уравнения восходящей ветви луча и времени его пробега в системе координат (X, Y, z) для атмосферы с горизонтальными ветровыми токами напишутся так:

$$\left. \begin{aligned} X &= \int_0^z \frac{c \cos \theta + U}{c \sin \theta} dz = \int_0^z \frac{c^2 + U(m_0 - U)}{c \sqrt{(m_0 - U)^2 - c^2}} dz, \\ Y &= \int_0^z \frac{V}{c \sin \theta} dz = \int_0^z \frac{V(m_0 - U)}{c \sqrt{(m_0 - U)^2 - c^2}} dz, \end{aligned} \right\} \quad (110)$$

$$t = \int_0^z \frac{dz}{c \sin \theta} = \int_0^z \frac{m_0 - U}{c \sqrt{(m_0 - U)^2 - c^2}} dz, \quad (111)$$

где θ определяется из (106).

Аналогично, нисходящая ветвь луча и время пробега в той же системе координат определяется уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} X &= X_h + \int_z^h \frac{c \cos \theta + U}{c \sin \theta} dz = X_h + \int_z^h \frac{c^2 + U(m_0 - U)}{c \sqrt{(m_0 - U)^2 - c^2}} dz, \\ Y &= Y_h + \int_z^h \frac{V}{c \sin \theta} dz = Y_h + \int_z^h \frac{V(m_0 - U)}{c \sqrt{(m_0 - U)^2 - c^2}} dz, \end{aligned} \right\} \quad (112)$$

$$t = t_h + \int_z^h \frac{dz}{c \sin \theta} = t_h + \int_z^h \frac{m_0 - U}{c \sqrt{(m_0 - U)^2 - c^2}} dz. \quad (113)$$

X_h , Y_h и t_h даются выражениями (104) и (105).

Наконец, уравнения тех же ветвей звукового луча и времени его пробега в первоначальной системе координат (x, y, z) напишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} x &= \int_0^z \frac{c \cos \theta \cos \varphi_0 + u}{c \sin \theta} dz, \\ y &= \int_0^z \frac{c \cos \theta \sin \varphi_0 + v}{c \sin \theta} dz, \end{aligned} \right\} \quad (114)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= x_h + \int_z^h \frac{c \cos \theta \cos \varphi_0 + u}{c \sin \theta} dz, \\ y &= y_h + \int_z^h \frac{c \cos \theta \sin \varphi_0 + v}{c \sin \theta} dz, \end{aligned} \right\} \quad (115)$$

* См. [61], стр. 249.

$$t = \int_0^s \frac{dz}{c \sin \theta}; \quad (111)$$

$$t = t_h + \int_h^s \frac{dz}{c \sin \theta}, \quad (113)$$

где $x_h = \frac{\xi}{2}$, $y_h = \frac{\eta}{2}$ даются выражениями (109).

Выше уже отмечалось, что луч 2-го типа представляет кривую двойкой кривизны, симметричную относительно вертикали, проходящей через вершину луча, в которой касательная к лучу и нормаль к фронту волны совпадают и параллельны земной поверхности. Проекция луча на горизонтальную плоскость является кривой, симметричной относительно проекции вершины луча на эту плоскость, и с ограниченным угловым коэффициентом

$$\left| \frac{dY}{dX} \right| = \left| \frac{V}{U + \cos \theta} \right| < \frac{1}{3}.$$

Следовательно касательные к проекции луча на горизонтальную плоскость составляют углы с осью X , не превосходящие 19° . Это показывает, что луч относительно мало отклоняется от начального азимута φ_0 .

§ 11

Мы видели, что звуковой луч определяется начальными значениями параметров θ_0, φ_0 наклона и азимута некоторого направления из начала координат. Меняя θ_0, φ_0 в пределах $0 \leq \theta_0 \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$, будем иметь криволинейную конгруэнцию, содержащую два определенных выше класса звуковых лучей. Уже отмечалось, что в звукометрических целях представляют интерес лишь лучи 2-го типа, т. е. лучи, возвращающиеся из атмосферы на земную поверхность, иначе, лучи, пересекающие плоскость $z=0$. Координаты точки пересечения луча (θ_0, φ_0) определяются, как мы видели, уравнениями (104) или (109). Следовательно совокупность $\xi(\theta_0, \varphi_0), \eta(\theta_0, \varphi_0)$ (109) при любых значениях (θ_0, φ_0) , лежащих в их интервалах изменения, определяет некоторую область, ограниченную или неограниченную, однолиственную или многолиственную в зависимости от состояния атмосферы. Назовем такую область зоной слышимости.

Если в плоскости $z=0$ найдутся такие точки, которые окажутся не соединенными лучами с источником, то эти точки образуют область, которую назовем зоной молчания.

Таким образом, зона слышимости определяется как область точечного преобразования уравнениями (109) области изменения переменных

$$0 \leq \theta_0 \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varphi_0 < 2\pi.$$

Если параметры θ_0, φ_0 конгруэнции лучей связать каким-нибудь соотношением $\chi(\theta_0, \varphi_0) = 0$, то из конгруэнции лучей тем самым выделится семейство, зависящее от одного параметра. Это семейство вообще определяет некоторую поверхность конгруэнции, пересекающую плоскость $z=0$ по линии, принадлежащей зоне слышимости. Расщепляя конгруэнцию лучей семейством поверхностей конгруэнции

$$\chi(\theta_0, \varphi_0) = c, \quad (116)$$

зависящих от параметра c , мы расслоим зону слышимости соответствующим семейством кривых, зависящих от c и определяемых уравнениями (109) и (116).

Из бесконечного множества различных способов расщепления конгруэнции ее поверхностями, а следовательно из бесконечного множества способов расслоения зоны слышимости различными семействами кривых, остановим наше внимание на следующих простейших.

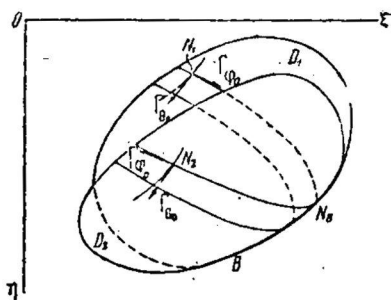
Расслоим зону слышимости следующими семействами кривых: 1) $\varphi_0 = \text{const}$, 2) $\theta_0 = \text{const}$, 3) $\tau = \tau(\theta_0, \varphi_0) = \text{const}$, 4) $h(\theta_0, \varphi_0) = \text{const}$. В силу указанного расслоения зона слышимости окажется покрытой сетью кривых, принадлежащих следующим семействам: 1) семейству изоазимутов Γ_{φ_0} , определяемому уравнениями (109) при $\varphi_0 = \text{const}$, 2) семейству изоклин Γ_{θ_0} с уравнениями (109) при $\theta_0 = \text{const}$, 3) семейству изохрон Γ_{τ} , которые определяются уравнениями (109) и (105), причем в последнем $\tau = \text{const}$, 4) семейству Γ_h , которое состоит из геометрического места точек возврата лучей, зондирующих высоты $h = \text{const}$; семейство Γ_h определяется уравнениями (109) и условием

$$\frac{c_0}{\cos \theta_0} + U_0 = c(h) + U(h),$$

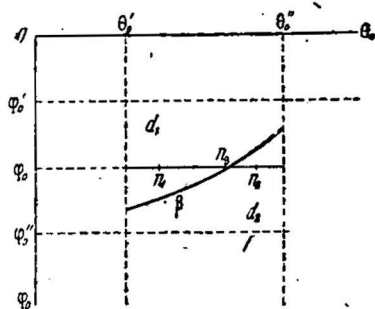
где $h = \text{const}$. Приведенные семейства линий окажутся полезными при изучении вопроса о распределении конгруэнции лучей и в исследовании формы зон слышимости и их границ.

§ 12

Рассмотрим какую-нибудь область в зоне слышимости D (фиг. 7), образованную точечным преобразованием уравнениями (109) прямоугольной области (фиг. 8) наклонений $\theta'_0 \leq \theta_0 \leq \theta''_0$ и азимутов $\varphi'_0 \leq \varphi_0 \leq \varphi''_0$, принадлежа-



Фиг. 7



Фиг. 8

щей области изменения параметров вспомогательной плоскости (θ_0, φ_0) . Нанесем на плоскости области D сеть линий, образованную семейством Γ_{φ_0} и Γ_{θ_0} . Определим положительное направление Γ_{φ_0} касательной $\left(\frac{\partial \xi}{\partial \theta_0}, \frac{\partial \eta}{\partial \theta_0}\right)$ в сторону возрастания θ_0 , а также положительное направление Γ_{θ_0} касательной $\left(\frac{\partial \xi}{\partial \varphi_0}, \frac{\partial \eta}{\partial \varphi_0}\right)$ в сторону роста φ_0 . Для решения вопроса о распределении сети Γ_{φ_0} , Γ_{θ_0} в зоне слышимости составим выражение определителя $\frac{D(\xi, \eta)}{D(\theta_0, \varphi_0)}$ преобразования плоскости (θ_0, φ_0) в плоскость (ξ, η) .

Если воспользоваться введенным Адамаром* понятием конечной части расходящегося интеграла и правилом дифференцирования интеграла, то удерж-

* См. [62], стр. 187.

живая обозначения Гальбрена*, можно получить следующие выражения для производных ξ , η (109), τ (105), Ξ , H (104) по переменным θ_0 и φ_0 :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial \theta_0} &= -2 \frac{\partial m_0}{\partial \theta_0} |\overline{H}_1|, \\ \frac{\partial \eta}{\partial \theta_0} &= -2 \frac{\partial m_0}{\partial \theta_0} |\overline{H}_2|, \\ \frac{\partial \tau}{\partial \theta_0} &= -2 \frac{\partial m_0}{\partial \theta_0} |\overline{f}_1|, \\ \frac{\partial \Xi}{\partial \theta_0} &= -2 m_0 \frac{\partial m_0}{\partial \theta_0} |\overline{f}_1|, \\ \frac{\partial H}{\partial \theta_0} &= -2 \frac{\partial m_0}{\partial \theta_0} |\overline{f}_2|, \end{aligned} \right\} \quad (117)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi_0} &= -2 V_0 |\overline{H}_1| + 2 m_0 |\overline{f}_2 \cos \varphi_0 - 2 \sin \varphi_0 (\overline{f}_3 + \overline{f}_4)|, \\ \frac{\partial \eta}{\partial \varphi_0} &= -2 V_0 |\overline{H}_2| + 2 m_0 |\overline{f}_2 \sin \varphi_0 + 2 \cos \varphi_0 (\overline{f}_3 + \overline{f}_4)|, \\ \frac{\partial \tau}{\partial \varphi_0} &= -2 V |\overline{f}_1| + 2 |\overline{f}_2|, \\ \frac{\partial \Xi}{\partial \varphi_0} &= -2 m_0 (V_0 |\overline{f}_1| - |\overline{f}_2|) + H, \\ \frac{\partial H}{\partial \varphi_0} &= -2 V_0 |\overline{f}_2| + 2 |\overline{f}_3 + 2 \overline{f}_4 - \Xi|, \end{aligned} \right\} \quad (118)$$

где

$$\left. \begin{aligned} |\overline{H}_1| &= m_0 |\overline{f}_1 \cos \varphi_0 - \overline{f}_2 \sin \varphi_0|, \\ |\overline{H}_2| &= m_0 |\overline{f}_1 \sin \varphi_0 + \overline{f}_2 \cos \varphi_0|. \end{aligned} \right\} \quad (119)$$

$$\left. \begin{aligned} |\overline{f}_1| &= \left| \int_0^h \frac{dz}{c^2 \operatorname{tg}^3 \theta} \right|, & |\overline{f}_3| &= \left| \int_0^h \frac{V^2 dz}{c^2 \operatorname{tg}^3 \theta} \right|, \\ |\overline{f}_2| &= \left| \int_0^h \frac{V dz}{c^2 \operatorname{tg}^3 \theta} \right|, & |\overline{f}_4| &= \left| \int_0^h \frac{dz}{\operatorname{tg} \theta} \right| \end{aligned} \right\} \quad (120)$$

Пользуясь разложением $m_0 - \eta(z) = \eta(h) - \eta(z)$ в интервале $(h - z)$, имеем

$$m_0 - \eta(z) = (h - z) \dot{\eta}(z_1),$$

где z_1 зависит от z и принадлежит $z < z_1 < h$. Составляя из (106) и (107)

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{(m_0 - U)^2 - c^2}}{c} = \frac{\sqrt{(m_0 - \eta)(m_0 - \eta + 2c)}}{c} = \frac{\sqrt{\dot{\eta}(z_1)(m_0 - \eta + 2c)}}{c} \sqrt{h - z}$$

и внося $\operatorname{tg} \theta$ в выражения конечных частей трех первых интегралов (120), найдем $|\overline{f}_1|$, $|\overline{f}_2|$, $|\overline{f}_3|$, $|\overline{f}_4|$ в следующем виде:

* См. [50], стр. 155—164.

$$\left. \begin{aligned} \overline{f_1} &= \int_0^h \frac{Q(z) - Q(h)}{(h-z)^{\frac{3}{2}}} dz - \frac{2Q(h)}{h^{\frac{1}{2}}}, \\ \overline{f_2} &= \int_0^h \frac{V(z)Q(z) - V(h)Q(h)}{(h-z)^{\frac{3}{2}}} dz - \frac{2V(h)Q(h)}{h^{\frac{1}{2}}}, \\ \overline{f_3} &= \int_0^h \frac{V^2(z)Q(z) - V^2(h)Q(h)}{(h-z)^{\frac{3}{2}}} dz - \frac{2V^2(h)Q(h)}{h^{\frac{1}{2}}}, \\ \overline{f_4} &= \int_0^h \frac{q(r)}{(h-z)^{\frac{1}{2}}} dz, \end{aligned} \right\} \quad (121)$$

где

$$\left. \begin{aligned} Q(z) &= \frac{c(z)}{\{[m_0 - \eta(z) + 2c(z)] \eta'(z)\}^{\frac{3}{2}}} > 0, \\ Q(h) &= \frac{c(h)}{\{2c(h) \eta'(h)\}^{\frac{3}{2}}} > 0, \\ q(z) &= \frac{c(z)}{\sqrt{[m_0 - \eta(z) + 2c(z)] \eta'(z)}} > 0. \end{aligned} \right\} \quad (122)$$

Пользуясь выражениями для производных (117), (118) и (119), найдем

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(\theta_0, \varphi_0)} = 4m_0 \frac{\partial m_0}{\partial \theta_0} E_0. \quad (123)$$

где

$$E_0(\theta_0, \varphi_0) = (\overline{f_2})^2 - \overline{f_1}(\overline{f_3} + \overline{f_4}), \quad (124)$$

$$\frac{\partial m_0}{\partial \theta_0} = \frac{c_0 \sin \theta_0}{\cos^2 \theta_0} \geq 0, \quad \text{для } 0 \leq \theta_0 \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varphi_0 < 2\pi.$$

$$m_0 > 0$$

Отсюда следует, что знак $\frac{D(\xi, \eta)}{D(\theta_0, \varphi_0)}$ определяется знаком E_0 , зависящим от состояния атмосферы и параметров θ_0, φ_0 луча 2-го типа.

Уравнение

$$E_0(\theta_0, \varphi_0) = 0 \quad (125)$$

определяет в плоскости (θ_0, φ_0) одну или несколько действительных или мнимых кривых. Допустим, что одна из кривых β делит нашу область в плоскости (θ_0, φ_0) на подобласти d_1 и d_2 , где за исключением точек общей границы β знак E_0 сохраняется, например, пусть в области d_1 значения $E_0 > 0$ и в области d_2 значения $E_0 < 0$. Тогда d_1 преобразуется в область D_1 плоскости (ξ, η) с прямым расположением положительных направлений линий $\Gamma_{\varphi_0}, \Gamma_{\theta_0}$, например в точке N_1 (фиг. 7), соответствующей точке $n_1 \in d_1$. Наоборот, область d_2 отрицательных значений E_0 преобразуется в D_2 с обратным расположением линий $\Gamma_{\varphi_0}, \Gamma_{\theta_0}$, например в точке N_2 , соответствующей $n_2 \in d_2$. Очевидно D_2 может частично или полностью перекрыть область D_1 , образовав шов по линии B — отображению границы β . Таким образом, может оказаться, что разные точки области (θ_0, φ_0) будут соответствовать одному положению точки плоскости (ξ, η) , принадлежащей различным листам области преобразования. Иначе различные звуковые лучи могут вернуться в одну и ту же точку земной поверхности, и так как вообще эти лучи имеют различное время пробега,

то одна и та же точка земной поверхности может получить два последовательных сигнала звукового импульса, т. е. показать двукратную слышимость.

Очевидно, в точках границы B направления Γ_{φ_0} и Γ_{θ_0} совпадают, так как элемент площади $d\xi d\eta = \frac{D(\xi, \eta)}{D(\theta_0, \varphi_0)} d\theta_0 d\varphi_0$ в этих точках обращается в нуль. Следовательно вдоль изоазимута $\Gamma_{\varphi_0}(N_1 N_B N_2)$ плоскости (ξ, η) , соответствующего линии $\varphi_0 = \text{const}(n_1 n_B n_2)$ в плоскости (θ_0, φ_0) , расположение $\Gamma_{\varphi_0}, \Gamma_{\theta_0}$ из прямого непрерывно переходит в обратное, проходя через точку N_B линии $E_0 = 0$ (125). Линия $E_0 = 0$ является огибающей семейства Γ_{φ_0} , а также и семейства Γ_{θ_0} , ибо условие $\frac{D(\xi, \eta)}{D(\theta_0, \varphi_0)} = 0$ является вместе с (109) уравнениями огибающей семейства линий (109), которые даны в параметрической форме и в которых φ_0 или соответственно θ_0 рассматриваются как параметры семейств Γ_{φ_0} и Γ_{θ_0} . Таким образом, линии Γ_{φ_0} и Γ_{θ_0} переходят из области D_1 первого листа в область D_2 второго листа, перегнутого по линии B . Если окажется, что область D_2 содержит новую линию (125), огибающую семейств $\Gamma_{\varphi_0}, \Gamma_{\theta_0}$, то вдоль этой второй линии плоскость второго листа перегнется вновь, образуя третий лист, и т. д. Следовательно на плоскости (ξ, η) могут оказаться точки, соответствующие нескольким различным точкам плоскости (θ_0, φ_0) , т. е. точки многократной слышимости, достижимые несколькими лучами с различным вообще временем пробега.

Итак, возникновение многократной слышимости на земной поверхности обязано разбиению конгруэнции лучей 2-го типа поверхностями (125) на частные конгруэнции таких лучей, для которых знак функционального определителя (123), а следовательно функции E_0 сохраняется внутри частной конгруэнции и меняется при переходе через поверхность (125). Существование поверхности (125) связано с образованием фокальной поверхности конгруэнции лучей, т. е. такой вообще многополостной поверхности, в каждой точке которой с этой поверхностью соприкасается один из лучей конгруэнции. Эта поверхность может быть образована семейством ребер возврата кривых, лежащих на фокальной поверхности, являющихся огибающими семейства лучей, зависящих от одного параметра и образующих семейство поверхностей, расщепляющих конгруэнцию лучей 2-го типа. Линии пересечения фокальной поверхности с плоскостью $(\xi, 0, \eta)$ являются линиями $E_0(\theta_0, \varphi_0) = 0$ (125). Как показал Гальбрен*, луч 1-го типа и восходящая ветвь луча 2-го типа не могут образовать фокуса. Лишь на нисходящей ветви луча 2-го типа могут образоваться фокусы при выполнении необходимого и достаточного условия для этого луча

$$E_0(\theta_0, \varphi_0) \leq 0, \quad (126)$$

причем условие $E_0(\theta_0, \varphi_0) = 0$ показывает, что фокусы лежат на плоскости $(\xi, 0, \eta)$.

Исследование знака E_0 в соседстве с особыми значениями θ_0 (например $\theta_0 = 0$, или значением максимума функции $\eta(z)$), изучение свойств и особенностей поверхности фокусов достаточно полно освещено Гальбреном**. В тесной связи с образованием поверхности фокусов находится условие существования огибающей семейства проекций лучей Γ_{φ_0} на азимутальную плоскость $\varphi_0 = \text{const}$, т. е. семейства кривых $X = X(z, \theta_0, \varphi_0)$ (110), (112) при $\varphi_0 = \text{const}$, ибо, как выше было указано, поверхность конгруэнции $\varphi_0 = \text{const}$ относительно мало уклоняется от азимутальной плоскости $\varphi_0 = \text{const}$, так что приближенно можно было бы фокальную поверхность отождествить с геометрическим

* См. [50], стр. 297—307.

** См. [50], стр. 307—321.

местом огибающих различных азимутов кривых $X = X(z, \theta_0, \varphi_0)$. Как показал Гальбрен*, необходимым и достаточным условием существования такой огибающей для нисходящих ветвей лучей является неравенство $\frac{\partial E}{\partial \theta_0} = -2 \frac{\partial m_0}{\partial \theta_0} |\bar{f}_1| < 0$, т. е. условие

$$|\bar{f}_1| > 0. \quad (127)$$

Это условие (127) вместе с тем показывает на приближение точки возврата луча постоянного азимута к источнику, тогда как при отсутствии огибающей координата E луча, наоборот, возрастает с наклоном θ_0 , а следовательно и с высотой зондирования атмосферы. Свойства таких огибающих, их формы, особенности достаточно полно изучены Гальбреном**.

Образование на каком-либо луче (θ_0, φ_0) фокуса тесно связано с появлением характеристической точки на проекции того же луча в азимутальной плоскости φ_0 , именно: образование фокуса на некоторой высоте z_E вызывает появление характеристической точки на высоте $z_F > z_E$, следовательно условие $E_0(\theta_0, \varphi_0) \leq 0$ влечет выполнение для этого луча условия $|\bar{f}_1| > 0$. Наоборот, если проекция луча не имеет характеристической точки, то луч не имеет фокуса. Но если проекция луча допускает образование характеристической точки, то луч может не иметь фокуса в нисходящей ветви даже ниже источника, если бы последний находился над поверхностью Земли. Таким образом, имеем следующие возможные комбинации знаков E_0 и $|\bar{f}_1|$:

E_0	$ \bar{f}_1 $
$E_0 > 0$	$ \bar{f}_1 < 0, \bar{f}_1 = 0, \bar{f}_1 > 0$
$E_0 = 0$	$ \bar{f}_1 > 0$
$E_0 < 0$	$ \bar{f}_1 > 0$

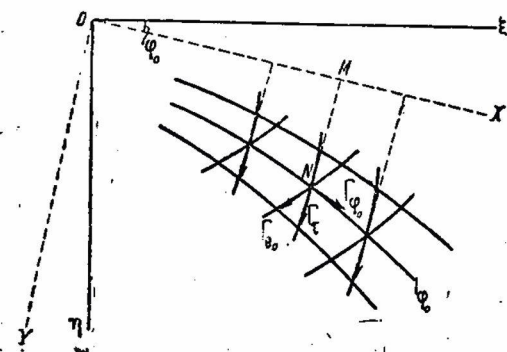
Приведенными сочетаниями знаков E_0 и $|\bar{f}_1|$ характеризуются различные типы распределения семейств линий Γ_{φ_0} , Γ_{θ_0} и их особенности, в предположении постоянства знака $|\bar{f}_2|$, т. е. $\frac{\partial H}{\partial \theta_0}$. Рассмотрим распределение семейств Γ_{φ_0} , Γ_{θ_0} последовательно при допустимых приведенной таблицей соединениях знаков E_0 и $|\bar{f}_1|$, полагая для определенности $|\bar{f}_2| < 0$, т. е. $\frac{\partial H}{\partial \theta_0} > 0$.

1. Предположим, что в некоторой области изменения параметров θ_0, φ_0 выполнены неравенства $E_0 > 0$ и $|\bar{f}_1| < 0$. Первое неравенство показывает, что преобразование области (θ_0, φ_0) в соответствующую область зоны слышимости является однозначным, и расположение семейств Γ_{φ_0} , Γ_{θ_0} во всех точках этой области является прямым. Второе неравенство показывает, что линии семейства Γ_{φ_0} имеют направление от начала координат — источника звуковых импульсов — в сторону положительных X . Принятое неравенство $\frac{\partial H}{\partial \theta_0} > 0$ указывает на направление линий семейства Γ_{θ_0} в сторону положительных Y . Расположение линий семейств Γ_{φ_0} , Γ_{θ_0} представится подобным расположению на фиг. 9.

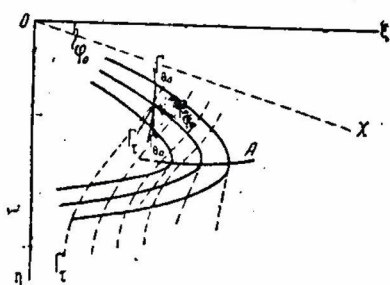
2. Расположение семейства линий Γ_{φ_0} , Γ_{θ_0} при знаковом сочетании $E_0 > 0$ и $|\bar{f}_1| > 0$ подобно приведенному — оно прямое, но направление касательных к Γ_{φ_0} и Γ_{θ_0} противоположно направлению предыдущего случая.

* См. [50], стр. 273—276.

** См. [50], стр. 276—296.



Фиг. 9



Фиг. 10

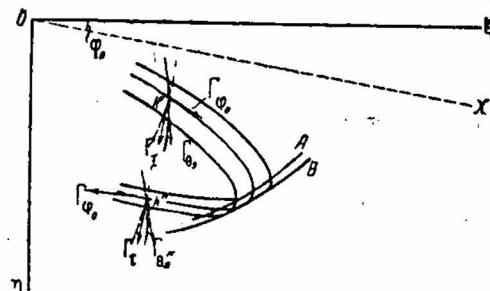
3. Соединяя два приведенных случая расположения Γ_{φ_0} , Γ_{θ_0} в одной области зоны слышимости, будем иметь языкообразный ход линий Γ_{φ_0} , меняющих свое направление на противоположное в точках, удовлетворяющих уравнению

$$|\bar{f}_1(\theta_0, \varphi_0)| = 0, \quad (128)$$

образующих геометрическое место — кривую A . Расположение линий Γ_{φ_0} , Γ_{θ_0} представится подобным расположению на фиг. 10.

4. Расположение линий при выполнении условий $E_0 < 0$ и $|\bar{f}_1| > 0$ характеризуется обратным расположением линий Γ_{φ_0} , Γ_{θ_0} и направлением линий Γ_{φ_0} в сторону отрицательных X .

На фиг. 11 изображено расположение линий в некоторой области зоны слышимости при последовательном осуществлении всех знакосочетаний E_0 и $|\bar{f}_1|$, показанных в приведенной таблице. В участке кривой Γ_{φ_0} от значения параметра $\theta_0 = \theta_0'$ (точка N') до значения $\theta_0 = \theta_0^{(2)}$ корня уравнения (128) $|\bar{f}_1(\theta_0, \varphi_0)| = 0$ (пересечения Γ_{φ_0} с линией A) удовлетворяются условия $E_0 > 0$, $|\bar{f}_1| < 0$. В точке пересечения Γ_{φ_0} с линией A выполняются условия $E_0 > 0$, $|\bar{f}_1| = 0$. На участке между линией A и огибающей B семейства Γ_{φ_0} и Γ_{θ_0} выполнены неравенства $E_0 > 0$, $|\bar{f}_1| < 0$. В точке касания Γ_{φ_0} с кривой B имеют место условия $E_0 = 0$, $|\bar{f}_1| > 0$. И наконец, на участке между точкой касания с B и точкой N'' выполняются условия $E_0 < 0$ и $|\bar{f}_1| > 0$. Расположение линий Γ_{φ_0} , Γ_{θ_0} на участке от N' до точки касания с огибающей $E_0 = 0$ — прямое: на последующем участке расположение обратное. В точках $E_0 = 0$ линии Γ_{φ_0} и Γ_{θ_0} соприкасаются с их огибающей $E_0 = 0$.



Фиг. 11

Приведенной характеристикой отдельных случаев и их комбинациями исчерпываются различные возможные случаи расположения кривых Γ_{φ_0} , Γ_{θ_0} и их особенности в зоне слышимости.

В точках кривой A , удовлетворяющих уравнению (128), направление линий семейства Γ_{φ_0} меняется на противоположное. Нетрудно установить характер хода функции „состояния“ $\eta(z)$, обуславливающий изменение знака $|\bar{f}_1|$. Из

выражений (121) и (122) следует, что знак $\bar{f}_1$ зависит от величины $\eta'(h)$ — градиента функции $\eta(z)$ на высоте проникновения луча, ибо функции $c(z)$ и $\eta(z)$ в интервале интегрирования получают относительно небольшие изменения. Если для какого-нибудь луча, проникающего на высоту h , распределение $\eta(z)$ приводит к $\bar{f}_1 < 0$, то оставляя ход функции $\eta(z)$ в интервале $(0, h - \varepsilon)$ неизменным и увеличивая рост $\eta(z)$ в малом интервале $(h - \varepsilon, h)$ в соседстве с $z = h$, т. е. увеличивая градиент η' для z , близких к $z = h$, мы мало изменим положительные слагаемые в выражении $\bar{f}_1$ (121) и сильно уменьшим отрицательные слагаемые, что приведет к перемене знака $\bar{f}_1$.

Таким образом, чтобы для некоторого луча оправдалось неравенство $\bar{f}_1 > 0$, достаточно иметь большой градиент функции $\eta(z)$ для z в соседстве с высотой проникновения луча. Наоборот, малыми градиентами $\eta(z)$ на высотах проникновения луча обуславливаются отрицательные значения $\bar{f}_1$. Так например, для лучей 2-го типа, близких к их предельному лучу 3-го типа, т. е. для лучей, зондирующих высоты h , смежные с высотой $h' > h$, на которой $\left(\frac{d\eta}{dz}\right)_{z=h'} = 0$, градиент $\eta'(h)$ принимает как угодно малые значения, а следовательно $\bar{f}_1 < 0$, т. е. координата точки возврата такого луча неограниченно увеличивается по мере приближения $h \rightarrow h'$, и луч асимптотически приближается к плоскости $z = h'$.

§ 13

Выясненные в § 9 условия образования звуковых лучей, зондирующих атмосферу, и их классификация всецело обусловлены ходом функции $\eta(z, \varphi_0) = c(z) + u(z) \cos \varphi_0 + v(z) \sin \varphi_0$ в азимуте φ_0 . Распределение лучей в пространстве, их особенности и наконец зоны слышимости с их границами определяются свойствами ограниченной, однозначной, непрерывной с такими же производными функции $\eta(z, \varphi_0)$ двух переменных, т. е. свойствами поверхности „состояния атмосферы“.

Гальбрен* сделал попытку дать классификацию зон слышимости, связав тот или иной класс зон со своим участком поверхности $\eta(z, \varphi_0)$, определяющим этот класс. Дадим здесь сжатый обзор этой классификации, отсылая за подробностями к самой монографии Гальбрена.

1. Зона слышимости первого вида порождается лучами 2-го типа, которые точками пересечения с плоскостью $z = 0$ заполняют всю плоскость земной поверхности и которые зондируют атмосферу, начиная от слоев, непосредственно прилегающих к земной поверхности ($h = 0$) до высот $h_3'(\varphi_0)$ (фиг. 6), зависящих от φ_0 , на которых $\left(\frac{d\eta}{dz}\right)_{z=h_3'} = 0$, т. е. на которых кривая $\eta(z)$ впервые коснется вспомогательной прямой m_0' . В этом случае зона молчания отсутствует. Очевидно, подобная зона слышимости возникнет, если кривая „состояния“ $\eta(z, \varphi_0)$ в любом азимуте возрастает от точки a_0 до точки касания M' (фиг. 6).

В зоне слышимости первого вида допустимы различные случаи расположения линий семейства $\Gamma_{\varphi_0}, \Gamma_{\theta_0}$. Лучи 2-го типа произвольного азимута, на малых отклонений вернуться из атмосферы с небольших высот на земную поверхность вблизи от источника. Легко оценить для таких лучей знак** $\bar{f}_1$. Оказывается, $\bar{f}_1 < 0$, а следовательно в соседстве с источником $E_0 > 0$, в чем можно убедиться и непосредственно. Такие же знаки E_0 и $\bar{f}_1$ остаются для лучей, близких к предельному лучу 3-го типа, т. е. для точек зоны слыши-

* См. [50], стр. 322—341.

** См. [50], стр. 259—261.

мости, неограниченно удаленных от источника. Следовательно линии Γ_{φ_0} выходят из начала координат, имея направление в сторону положительных X при возрастании θ_0 , и вместе с линиями Γ_{θ_0} образуют сеть прямого расположения. Такой же характер несут точки, неограниченно удаленные от источника.

Что касается точек зоны слышимости, ограниченных и достаточно удаленных от источника, то для этих точек возможны комбинации знаков, приведенные в таблице, а следовательно возможно появление областей кратной слышимости с обратным расположением линий Γ_{φ_0} , Γ_{θ_0} . Очевидно, для каждой линии Γ_{φ_0} функции $|\bar{f}_1|$, E_0 могут изменить четное число раз свои знаки, а значит могут образоваться области многократной слышимости. Распределение линий Γ_{φ_0} , Γ_{θ_0} подобно приведенному на фиг. 9, 10 и 11.

Зона слышимости первого вида может возникнуть в секторе направлений, относительно близких к направлению ветра в приземном слое в том случае, если рост скорости ветра с высотой компенсируют падение температуры. Такие зоны наблюдались, например, при взрыве в Винер-Неуштадте 7.VI.1912 при извержении вулкана Азама в 1912 и 1913 гг.

II. Зона слышимости второго вида образуется лучами 2-го типа, зондирующими высоты некоторого слоя (h_0 h') (фиг. 5), зависящие от азимута φ_0 . Наклонения этих лучей меняются от $\theta_0=0$ до θ'_0 , определяемого из уравнения

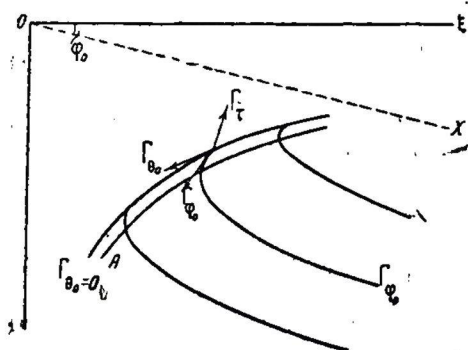
$$m_0 = \frac{c_0}{\cos \theta'_0} + U_0 = \eta(h') = c(h') + U(h'),$$

при $\left(\frac{d\eta}{dz}\right)_{z=h'} = 0$. Такая зона имеет внутреннюю границу, отделяющую зону слышимости от зоны молчания, заключающей источник звукового импульса, и неограниченно простирается во всех направлениях. Подобная зона возникает, если кривая „состояния“ $\eta(z, \varphi_0)$ в любом азимуте убывает от точки a_0 до некоторого минимума, затем возрастает, пересекая прямую $a_0 a_1$ (фиг. 5) до первого максимума (M''). Такие зоны многократно наблюдались почти во всех случаях распространения мощного импульса в атмосфере.

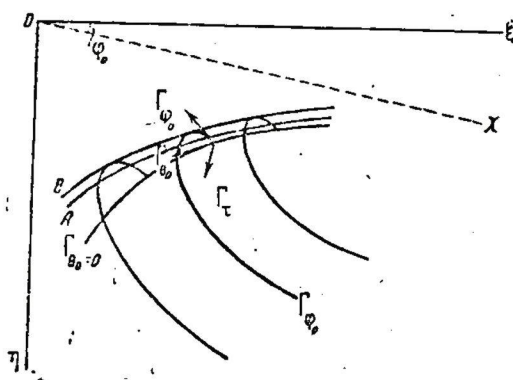
Нетрудно установить* знак $|\bar{f}_1|$ для лучей наклонений, близких к $\theta_0=0$. Оценка $|\bar{f}_1|$ для $\theta_0 \rightarrow 0$ приводит к неравенству $|\bar{f}_1| > 0$, тогда как для тех же лучей E_0 может иметь как положительные, так и отрицательные значения в зависимости от распределения ветровых составляющих в слое (0, h_0). В случае $E_0 > 0$ лучи, смежные с границей конгруэнции ($\theta_0=0$), не имеют фокальной поверхности, а следовательно расположение линий Γ_{φ_0} , Γ_{θ_0} остается прямым. Границей зоны слышимости является линия $\Gamma_{\theta_0=0}$, от которой отходят линии семейства Γ_{φ_0} , приближаясь сначала к источнику в силу неравенства $|\bar{f}_1| > 0$ до первого корня θ_0 уравнения (128) $|\bar{f}_1(\theta_0, \varphi_0) = 0$ — точки пересечения с кривой A . Уравнение (128) имеет по крайней мере один корень, так как при $\theta_0 \rightarrow \theta'_0$, т. е. для лучей, смежных с предельным лучом, асимптотически приближающимся к плоскости $z=h'$, имеем $|\bar{f}_1| < 0$. Таким образом, в интервале $0 \leq \theta_0 < \theta'_0$ при постоянном φ_0 функция $|\bar{f}_1|$ меняет свой знак вообще нечетное число раз, тогда как E_0 проходит через нуль четное число раз.

Расположение линий Γ_{φ_0} , Γ_{θ_0} в области, смежной с границей, может быть представлено подобно фиг. 12. Но если при $\theta_0 \rightarrow 0$ $E_0 < 0$, то лучи, смежные с границей конгруэнции, имеют фокусы, а потому расположение линий семейства Γ_{φ_0} , Γ_{θ_0} окажется обратным, и границей зоны слышимости будет огибающая B (фиг. 13) линий Γ_{φ_0} , Γ_{θ_0} , т. е. линия, определяемая уравне-

* См. [50], стр. 256—259.



Фиг. 12



Фиг. 13

нием (125) $E_0(\theta_0, \varphi_0) = 0$. При дальнейшем изменении θ_0 функция E_0 , пройдя через нуль, остается положительной или вновь может изменить знак, так что во всем интервале $0 \leq \theta_0 < \theta_0'$ знак E_0 , как и $|f_1|$, меняется нечетное число раз. Расположение линий в смежности с границей представится подобно фиг. 13.

Таким образом, в области, смежной с границей зоны слышимости второго вида, каждая точка достигается двумя различными лучами, т. е. появляется двукратная слышимость, а самая граница (кривая B), являясь геометрическим местом фокусов, выделяется усиленной слышимостью, что неоднократно отмечалось наблюдениями.

III. Наконец, последний вид зоны слышимости — третий по классификации Гальбрена — образуется лучами 2-го типа, зондирующими промежуточные высоты слоя (h_2, h'') (фиг. 5) и предельными лучами 3-го типа, которые асимптотически приближаются к границам этого слоя, проникая соответственно на высоты h_2 и h'' . Очевидно, с изменением азимута φ_0 этот слой вообще меняется как по мощности, так и по своему положению в атмосфере. Накло-

нения этих лучей меняются в пределах интервала (θ_0', θ_0'') , зависящего от φ_0 ; концы этого интервала удовлетворяют уравнениям $m_0(\theta_0', \varphi_0) = \eta(h')$ и $m_0(\theta_0'', \varphi_0) = \eta(h'')$, причем h' и h'' — корни уравнения $\frac{d\eta}{dz} = 0$ и, кроме того, $\eta(h') = \eta(h_2)$.

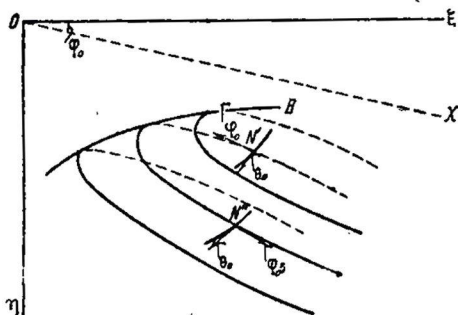
Промежуточные лучи 2-го типа зондируют высоты, определяемые абсциссами точек пересечения кривой $\eta(z)$ с прямыми, параллельными оси z и заключенными между $b_0' M'$ и $b_0'' M''$, касающимися кривой $\eta(z)$ в точках M' и M'' соответственно (фиг. 5). Может оказаться, что для какого-нибудь азимута или интервала азимутов первая точка касания M' совпадает с точкой a_0 , т. е. что в точке a_0 прямая $a_0 a_1$ касается кривой $\eta(z)$; тогда в секторе этих азимутов возникнет зона слышимости третьего вида от лучей, зондирующих высоты слоя (h_0, h') . Подобные зоны могут возникнуть в естественных условиях атмосферы.

Легко установить*, что для наклонений $\theta_0 > \theta_0'$ и близких к θ_0' значения $|f_1| > 0$, $E_0 < 0$, а следовательно линии Γ_{φ_0} из бесконечно удаленных точек будут приближаться к источнику, образуя с линиями Γ_{θ_0} обратное расположение. Так как, по мере того как θ_0 будет стремиться к θ_0'' , знаки $|f_1|$ и E_0 должны измениться на обратные, то семейство линий Γ_{φ_0} коснется их огибающей B (фиг. 14) уравнения (125) $E_0(\theta_0, \varphi_0) = 0$, а затем изменит направление, и при дальнейшем увеличении θ_0 будет удаляться от источника.

* См. [50], стр. 250—255, 307—310.

Таким образом, в интервале (θ_0', θ_0'') функции E_0 , $|\bar{f}_1|$ меняют свой знак нечетное число раз, а следовательно в такой зоне обнаружится по крайней мере двукратная слышимость. Внутренней границей зоны является линия B — геометрическое место фокусов, отличающаяся от других точек резкой слышимостью.

Сопоставляя только что описанные три вида зоны слышимости, находим, что они отличаются лишь знаками E_0 и $|\bar{f}_1|$ в смежности с внутренней границей этих зон, причем границей зоны первого вида является начало координат — предельная точка, в которую оказалась стянута граница. В точках, смежных с внутренней границей, функции E_0 и $|\bar{f}_1|$ принимают следующие значения:



Фиг. 14

Вид зоны слышимости	E_0	$ \bar{f}_1 $
Первый	$E_0 > 0$	$ \bar{f}_1 < 0$
Второй	$E_0 > 0, E_0 < 0$	$ \bar{f}_1 > 0$
Третий	$E_0 < 0$	$ \bar{f}_1 > 0$

Что касается внешней границы — бесконечно удаленных точек, — то во всех случаях для точек, неограниченно удаленных от источника, $E_0 > 0$ и $|\bar{f}_1| < 0$. В остальном три вида зон повторяют типичные для всех зон особенности в распределении линий семейств Γ_{φ_0} и Γ_{θ_0} , приведенные в § 12.

Вследствие того, что $\eta(z, \varphi_0)$ зависит от азимута φ_0 , возможны переходы от одного вида зоны слышимости к иному при изменении φ_0 , что может исказить, а иногда установить другие границы слышимости. Гальбрен разбирает простейшие случаи* соединения зон слышимости различных видов. Ограничимся здесь лишь замечанием, что в результате соединения разного вида областей слышимости могут возникнуть сложные границы, области слышимости могут частично накладываться, что повлечет за собой увеличение кратности слышимости. Последнее обстоятельство осложняет обработку опытно получаемых записей фаз вступления разных звуковых лучей, проникающих на разные высоты атмосферы.

§ 14

Особенный интерес представляет рассмотрение семейства Γ_{τ} — изохрон в зоне слышимости, т. е. семейства линий равного времени пробега. Это семейство в параметрической форме определяется уравнениями (109) и (105):

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi(\theta_0, \varphi_0), \\ \eta &= \eta(\theta_0, \varphi_0), \\ \tau &= \tau(\theta_0, \varphi_0) = \text{const.} \end{aligned} \right\}$$

Линии этого семейства могут быть нанесены на карту зоны слышимости непосредственно по данным наблюдения времени пробега звуковой волны при

* См. [50], стр. 336—341.

достаточно густой сети наблюдательных станций, поэтому изучить свойства и расположение этих линий представляет особый интерес. Прежде чем изучать расположение этих линий вместе с каким-либо семейством Γ_{φ_0} или Γ_{θ_0} , остановимся на дифференциальных свойствах изохроны.

Пусть какая-нибудь область зоны слышимости покрыта линиями Γ_{τ} (фиг. 9). На одной из этих линий рассмотрим точку N , в которую возвращается один из лучей (θ_0, φ_0) конгруэнции, пробежавший весь путь от источника O до точки N за время, равное индексу изохроны Γ_{τ} . Проведем касательную к изохроне в точке N . Угловой коэффициент этой касательной в точке N определится из выражения

$$\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)_N = \frac{D_2}{D_1}, \quad (129)$$

где

$$D_1 = \frac{D(\xi, \tau)}{D(\theta_0, \varphi_0)},$$

$$D_2 = \frac{D(\eta, \tau)}{D(\theta_0, \varphi_0)}.$$

Пользуясь таблицей производных (117) и (118), функциональным определителем D_1 и D_2 можно дать следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= 4 \frac{\partial m_0}{\partial \theta_0} E_0 \sin \varphi_0, \\ D_2 &= -4 \frac{\partial m_0}{\partial \theta_0} E_0 \cos \varphi_0, \end{aligned} \right\} \quad (130)$$

где E_0 определяется из (124). Внося (130) в (129), найдем значение углового коэффициента в точке N :

$$\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)_N = -\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi_0}. \quad (131)$$

Это выражение показывает, что касательная к изохроне в точке N перпендикулярна прямой, составляющей с осью ξ угол φ_0 , т. е. перпендикулярна оси X , повернутой на угол φ_0 в положительном направлении. Выражение (131) позволяет установить азимут луча, возвращающегося в произвольно взятую на изохроне точку N .

Если теперь рассмотрим линию Γ_{φ_0} , проходящую через N , то на основании показанного свойства касательной к изохроне можем утверждать, что в каждой точке Γ_{φ_0} касательные к изохронам, проходящим через эти точки, оказываются параллельными оси Y (фиг. 9).

Нетрудно убедиться, что справедливо и обратное: геометрическое место точек касания пучка прямых, перпендикулярных оси X , с линиями семейства Γ_{τ} представляет линию Γ_{φ_0} азимута φ_0 , равного углу, образуемому осью X с осью ξ . В самом деле, напомним уравнение прямой MN (фиг. 9), проходящей через заданную точку $M(x, y)$ и перпендикулярную оси X :

$$\xi \cos \varphi_0 + \eta \sin \varphi_0 = \frac{x}{\cos \varphi_0} = X.$$

Решая это уравнение совместно с системой (109) и (105), определяющей семейство изохрон, найдем значения азимутов ψ точек пересечения прямой с выбранной изохроной Γ_{τ} , удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{aligned} \Phi(\theta_0, \psi) &= \xi(\theta_0, \psi) \cos \varphi_0 + \eta(\theta_0, \psi) \sin \varphi_0 - X = 0, \\ \tau &= \tau(\theta_0, \psi). \end{aligned}$$

Присоединим к этим уравнениям условие соприкосновения

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \psi} = \frac{-D_1 \cos \varphi_0 - D_2 \sin \varphi_0}{\frac{\partial \tau}{\partial \theta_0}} = \frac{2E_0}{|f_1|} \sin(\psi - \varphi_0) = 0.$$

Это условие для всех точек за исключением особенных ($E_0=0$) приводит к искомому соотношению $\psi = \varphi_0, \varphi_0 + \pi$, определяющему азимут точек касания, принадлежащих кривой Γ_{φ_0} или $\Gamma_{\varphi_0+\pi}$. Таким образом, точками касания нашего пучка прямых с семейством изохрон является линия Γ_{φ_0} .

Установленное свойство изохрон позволяет построить семейство Γ_{φ_0} по заданному семейству Γ_{τ} следующим образом. Берем произвольную точку на одной из изохрон и проводим прямую (ось X) из начала координат, перпендикулярную касательной к изохроне в выбранной точке. Угол с осью ξ этой прямой (осью X) определяет азимут φ_0 луча, попавшего в выбранную точку зоны слышимости. Восстанавливая в точках оси X перпендикуляры, определим их точками касания с изохронами геометрическое место — искомую Γ_{φ_0} , проходящую через выбранную точку. Таким образом, проводя из начала координат пучок прямых разных азимутов φ_0 , мы можем построить описанным приемом соответствующую этим прямым совокупность изоазимутальных кривых Γ_{φ_0} , которые вместе с линиями Γ_{τ} дадут другую сеть кривых в зоне слышимости. Связывая координаты точек Γ_{φ_0} со временем τ пробега лучей, вернувшихся в точки Γ_{φ_0} , получим две зависимости для каждого азимута. Пользуясь для удобства вспомогательной системой координат (X, Y) эти зависимости можно определить уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \Xi &= 2 \int_0^h \frac{c \cos \theta + U}{c \sin \theta} dz = 2 \int_0^h \frac{c^2 + U(m_0 - U)}{c \sqrt{(m_0 - U)^2 - c^2}} dz, \\ \tau &= 2 \int_0^h \frac{dz}{c \sin \theta} = 2 \int_0^h \frac{m_0 - U}{c \sqrt{(m_0 - U)^2 - c^2}} dz, \end{aligned} \right\} \quad (132)$$

$$\left. \begin{aligned} H &= 2 \int_0^h \frac{V}{c \sin \theta} dz = 2 \int_0^h \frac{V(m_0 - U)}{c \sqrt{(m_0 - U)^2 - c^2}} dz, \\ \tau &= 2 \int_0^h \frac{dz}{c \sin \theta} = 2 \int_0^h \frac{m_0 - U}{c \sqrt{(m_0 - U)^2 - c^2}} dz. \end{aligned} \right\} \quad (133)$$

Будем называть уравнения (132) и (133) уравнениями годографов, и обозначать (τ, Ξ) и (τ, H) . Годографы найдут в дальнейшем применение в решении обратной задачи. Отметим их некоторые свойства.

Найдем угловой коэффициент годографа (132) для какого-нибудь азимута φ_0 :

$$\frac{d\tau}{d\Xi} = \frac{\frac{\partial \tau}{\partial \theta_0}}{\frac{\partial \Xi}{\partial \theta_0}} = \frac{1}{m_0}. \quad (134)$$

Аналогично определится угловой коэффициент годографа (133):

$$\frac{d\tau}{dH} = \frac{f_1}{f_2}. \quad (135)$$

Соотношение (134) показывает, что в каждой точке (θ_0, φ_0) зоны слышимости может быть найдено значение $m_0(\theta_0, \varphi_0)$ по угловому коэффициенту годографа (132), построенного для азимута φ_0 на основании известного распределения изохрон в смежности с этой точкой. Тем самым в зоне слышимости может быть построена новая сеть линий $m_0(\theta_0, \varphi_0) = \text{const}$. Из выражения (106)

$$m_0 = \frac{c_0}{\cos \theta_0} + u_0 \cos \varphi_0 + v_0 \sin \varphi_0$$

следует, что, зная m_0 в какой-нибудь точке зоны слышимости и умея непосредственно определить значения φ_0 , c_0 , u_0 , v_0 , можно отыскать θ_0 , т. е. наклонение луча, вернувшегося из атмосферы в выбранную точку, или угол падения этого луча с горизонтом. Из выражения (107)

$$m_0 = \eta(h) = c(h) + U(h)$$

следует, что угловой коэффициент годографа позволяет установить величину $\eta(h) = c(h) + U(h)$ на высоте атмосферы, до которой проникает звуковой луч, возвращающийся в выбранную точку. Последнее соображение является особенно важным для обратной задачи — суждения о распределении c с высотой $c(z)$, $u(z)$, $v(z)$ по данным пробега лучей 2-го типа.

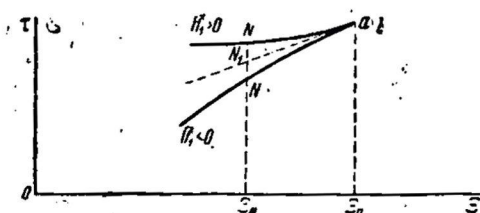
Можно было бы определить m_0 по формуле (106) из непосредственных инструментальных наблюдений углов θ_0 падения лучей, минуя построение изохрон и годографов. Однако этот путь скорее может служить проверкой вычисленных значений m_0 , ибо для решения обратной задачи необходимо знать достаточно густое распределение m_0 в зоне слышимости. Кроме того, само расположение изохрон в некоторых случаях позволяет делать довольно ценные заключения о распределении по высоте искомых величин $c(z)$, $u(z)$, $v(z)$.

Из (134) следует, что

$$\frac{d^2 \tau}{d\Xi^2} = \frac{1}{2m_0^3 |f_1|}. \quad (136)$$

Следовательно годограф (τ, Ξ) обращен к оси Ξ вогнутостью, если $|f_1| < 0$, и наоборот — выпуклостью при $|f_1| > 0$. Радиус кривизны R годографа определяется

$$R = 2 |f_1| (1 + m_0^2)^{\frac{3}{2}}. \quad (137)$$



Фиг. 15

Точки $|f_1| = 0$ являются особыми ($\frac{\partial \tau}{\partial \theta_0} = 0$, $\frac{\partial \Xi}{\partial \theta_0} = 0$). Покажем, что эти точки суть точки возврата первого рода. Напишем разложения $\tau(\theta_0, \varphi_0)$, $\Xi(\theta_0, \varphi_0)$ в точке N (фиг. 15), смежной с точкой a , в которой

$$\frac{\partial \tau}{\partial \theta_0} = 0, \quad \frac{\partial \Xi}{\partial \theta_0} = 0:$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_N - \tau_a &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \tau}{\partial \theta_0^2} \right)_a (\theta_0 - \theta_0^{(a)})^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 \tau}{\partial \theta_0^3} \right)_a (\theta_0 - \theta_0^{(a)})^3 + \varepsilon_1, \\ \Xi_N - \Xi_a &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Xi}{\partial \theta_0^2} \right)_a (\theta_0 - \theta_0^{(a)})^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 \Xi}{\partial \theta_0^3} \right)_a (\theta_0 - \theta_0^{(a)})^3 + \varepsilon_2. \end{aligned} \right\} \quad (138)$$

На основании (134) изменение ординаты касательной определится так:

$$\begin{aligned} \tau_{N_1} - \tau_a &= \frac{1}{m_0} (\Xi_N - \Xi_a) = \\ &= \frac{1}{m_0} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Xi}{\partial \theta_0^2} \right)_a (\theta_0 - \theta_0^{(a)})^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 \Xi}{\partial \theta_0^3} \right)_a [(\theta_0 - \theta_0^{(a)})^3 + \varepsilon_2] \right]. \end{aligned} \quad (139)$$

Составляя разность (138) и (139), найдем

$$\begin{aligned} \tau_N - \tau_{N_1} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 \tau}{\partial \theta_0^2} \right)_a - \frac{1}{m_0} \left(\frac{\partial^2 \Xi}{\partial \theta_0^2} \right)_a \right] (\theta_0 - \theta_0^{(a)})^2 + \\ &+ \frac{1}{6} \left[\left(\frac{\partial^3 \tau}{\partial \theta_0^3} \right)_a - \frac{1}{m_0} \left(\frac{\partial^3 \Xi}{\partial \theta_0^3} \right)_a \right] (\theta_0 - \theta_0^{(a)})^3 + \varepsilon, \end{aligned}$$

где $\varepsilon = \varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_2}{m_0}$.

Внеся в правую часть полученной разности выражения для производных из таблицы (117), найдем

$$\tau_N - \tau_{N_1} = \frac{2}{3m_0} \left(\frac{\partial m_0}{\partial \theta_0} \right)_a \left(\frac{\partial |f_1|}{\partial \theta_0} \right)_a (\theta_0 - \theta_0^{(a)})^3 + \varepsilon. \quad (140)$$

Из (140) следует, что знак $\tau_N - \tau_{N_1}$ определяется знаком $\theta_0 - \theta_0^{(a)}$, т. е. точка a является точкой возврата первого рода с расположением ветвей, представленным на фиг. 15. В самом деле, в силу возрастания Ξ вместе с θ_0 при $\theta_0 < \theta_0^{(a)}$, имеем $|f_1| < 0$, а при убывании Ξ , наоборот, $|f_1| > 0$, следовательно

$$\left(\frac{\partial |f_1|}{\partial \theta_0} \right)_a > 0.$$

Аналогично расположились бы ветви годографа, соприкасающиеся в точке возврата $|f_1| = 0$ при условии $\left(\frac{\partial |f_1|}{\partial \theta_0} \right)_a < 0$, при перемене направления Ξ от сближения с источником на удаление от него. Таковы особенности годографа (τ, Ξ) .

Обратимся к рассмотрению сети линий Γ_{φ_0} , Γ_τ . Имея семейство изохрон Γ_τ , найдем ортогональные траектории. В силу перпендикулярности направления изохроны к соответствующему азимуту имеем условие для ортогональной траектории к семейству изохрон

$$\frac{\partial \eta}{\partial \xi} = \operatorname{tg} \varphi_0.$$

Если принять θ_0 , φ_0 за независимые параметры луча, то это условие приведет к дифференциальному уравнению траекторий

$$\frac{d\theta_0}{\frac{\partial \xi}{\partial \varphi_0} \operatorname{tg} \varphi_0 - \frac{\partial \eta}{\partial \varphi_0}} = \frac{d\varphi_0}{\frac{\partial \eta}{\partial \theta_0} - \frac{\partial \xi}{\partial \theta_0} \operatorname{tg} \varphi_0}.$$

Пользуясь выражениями для производных (117), (118) и (119), преобразуем полученное уравнение к виду

$$\frac{d\theta_0}{|f_3 + |f_4 - V_0|f_2|} = \frac{d\varphi_0}{\frac{\partial m_0}{\partial \theta_0} |f_2|}.$$

Интегрируя полученное уравнение, найдем семейство $\chi(\theta_0, \varphi_0) = \text{const}$, которое вместе с уравнениями (109) определяет искомое семейство траекторий.

Ортогональной траекторией может оказаться изоазимутальная линия Γ_{φ_0} , т. е. линия $\varphi_0 = \text{const}$, при выполнении условия

$$|f_2| = 0 \quad (141)$$

вдоль линии Γ_{φ_0} .

К тому же условию (141) ортогональности Γ_{φ_0} к семейству изохрон придем из оценки угла, образованного касательными к Γ_{φ_0} и Γ_τ . Составляя выражения для направляющих косинусов положительных касательных к Γ_{φ_0} и Γ_τ , пользуясь таблицей производных (117), (118) и (119), нетрудно получить для угла ω , образованного линиями Γ_{φ_0} , Γ_τ , выражение

$$\cos \omega = \frac{|f_2|}{\sqrt{m_0^2 (|f_1|)^2 + (|f_2|)^2}}. \quad (142)$$

Тогда условием ортогональности Γ_{φ_0} к семейству Γ_τ окажется условие (141) при постоянном φ_0 . В силу последнего из равенств (117) условие (141) приводит к результату

$$H(\varphi_0) = \text{const}. \quad (143)$$

Годограф (τ, H) в этом случае обратится в прямую, параллельную оси τ . Очевидно, условие (143) является вместе с тем и достаточным условием ортогональности Γ_{φ_0} к линиям Γ_{τ} . Таким образом, для некоторого φ_0 линия Γ_{φ_0} может оказаться ортогональной траекторией к семейству Γ_{τ} в том лишь случае, если Γ_{φ_0} обратится в прямую (143), параллельную оси X выбранного азимута.

Покажем, что можно подобрать такое распределение составляющих ветра с высотой, чтобы линия Γ_{φ_0} для выбранного азимута оказалась прямой, параллельной оси X . Примем в некотором азимуте φ_0 функцию распределения $\eta(z) = c(z)$, т. е. предположим, что в этом азимуте

$$U(z) = u(z) \cos \varphi_0 + v(z) \sin \varphi_0 = 0,$$

т. е. что направление ветра на любой высоте перпендикулярно направлению φ_0 . Зададим $c(z)$ возрастающей, непрерывной с непрерывными производными функцией высоты z , для $z \geq 0$. Тогда в секторе направлений, смежных с φ_0 , будем иметь зону слышимости первого вида. Определим вторую составляющую ветра

$$V(z) = -u(z) \sin \varphi_0 + v(z) \cos \varphi_0$$

так, чтобы линия Γ_{φ_0} оказалось прямой $H = \text{const}$, параллельной оси X . Воспользовавшись выражениями (104) для координат возврата луча на земную поверхность, получим интегральное уравнение для определения искомой $V(z)$:

$$H = 2 \int_0^h \frac{V(z) m_0}{c(z) \sqrt{m_0^2 - c^2(z)}} dz, \quad (144)$$

где согласно (107) $m_0 = c(h)$.

Полагая $c(h) = x$, $c(z) = \xi$, приведем уравнение (144) к виду уравнения Абеля:

$$F(x) = \int_a^x \frac{f(\xi) d\xi}{\sqrt{x^2 - \xi^2}}, \quad (145)$$

где

$$F(x) = \frac{H}{2x}, \quad f(\xi) = \frac{V(z)}{c(z) c'(z)},$$

$z = z(\xi)$ из уравнения $c(z) = \xi$, и наконец

$$a = c(0) = c_0.$$

Умножая обе части (145) на $\frac{x dx}{\sqrt{y^2 - x^2}}$ и интегрируя в пределах (a, y) , получим

$$H \arccos \left(\frac{a}{y} \right) = \pi \int_a^y f(\xi) d\xi.$$

Дифференцируя обе части по y и заменяя y на ξ , получим

$$\frac{Ha}{\xi \sqrt{\xi^2 - a^2}} = \pi f(\xi),$$

или, возвращаясь к переменной z ,

$$\frac{Hc_0}{\sqrt{c^2(z) - c_0^2}} = \pi \frac{V(z)}{c'(z)},$$

откуда искомое решение будет

$$V(z) = \frac{Hc_0 c'(z)}{\pi \sqrt{c^2(z) - c_0^2}}. \quad (146)$$

Так как $V(z)$ — функция ограниченная, то из (146) следует, что если $c'(0) \neq 0$, то $H = \text{const} = 0$, т. е. линия Γ_{φ_0} совпадает с осью X , что достаточно очевидно, ибо в зоне слышимости первого вида линии Γ_{φ_0} выходят из начала координаты при $\eta'(0) \neq 0$. Но если $\eta'(0) = c'(0) = 0$, т. е. если кривая „состояния“ $\eta(z) = c(z)$ имеет градиент в приземном слое равный нулю, то $H = \text{const} \neq 0$, что и понятно, ибо, как отмечалось в § 9, в случае $\eta'(0) = 0$, координаты предельного луча $\theta_0 \rightarrow 0$ и время его пробега отличны от нуля.

Таким образом, при достаточно произвольном выборе распределения $c(z)$ можно установить распределение составляющих ветра так, чтобы для азимута φ_0 линия Γ_{φ_0} оказалась параллельной оси X , для чего достаточно удовлетворить условиям

$$\left. \begin{aligned} U(z) &= u(z) \cos \varphi_0 + v(z) \sin \varphi_0 = 0, \\ V(z) &= -u(z) \sin \varphi_0 + v(z) \cos \varphi_0 = \frac{H c_0 c'(z)}{\pi \sqrt{c^2(z) - c_0^2}}, \end{aligned} \right\} \quad (147)$$

откуда искомое распределение будет

$$\left. \begin{aligned} u(z) &= -\frac{H c_0 c'(z)}{\pi \sqrt{c^2(z) - c_0^2}} \sin \varphi_0 \\ v(z) &= \frac{H c_0 c'(z)}{\pi \sqrt{c^2(z) - c_0^2}} \cos \varphi_0. \end{aligned} \right\} \quad (148)$$

Аналогично можно показать, что при надлежащем выборе $V(z)$ линия Γ_{φ_0} может быть параллельной оси X в зонах слышимости второго и третьего видов.

Легко видеть, что помимо Γ_{φ_0} в перпендикулярном азимуте $\varphi_0 + \frac{\pi}{2}$ линия $\Gamma_{\varphi_0 + \frac{\pi}{2}}$, совпадающая с азимутальным направлением, также является ортогональной траекторией к изохронам. В самом деле, для азимута $\varphi_0 + \frac{\pi}{2}$ имеем

$$\begin{aligned} U(z) &= \frac{H c_0 c'(z)}{\pi \sqrt{c^2(z) - c_0^2}}, \\ V(z) &= 0. \end{aligned}$$

Из последнего равенства следует, что $H(\varphi_0 + \frac{\pi}{2}) = 0$, т. е. что линия $\Gamma_{\varphi_0 + \frac{\pi}{2}}$ совпадает с осью X для азимута $\varphi_0 + \frac{\pi}{2}$. Последнее обстоятельство обусловлено, очевидно, выполнением в азимуте $\varphi_0 + \frac{\pi}{2}$ условия

$$V(z) = -u(z) \sin\left(\varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) + v(z) \cos\left(\varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

иначе условия

$$\frac{v(z)}{u(z)} = \operatorname{tg}\left(\varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) = \text{const},$$

т. е. сохранением направления ветра по высоте. Итак, если направление ветра с высотой сохраняется, то в азимуте этого направления $V(z) = 0$, а следовательно ось X является изоазимутальной линией, ортогональной семейству изохрон. Очевидно, в этом случае ось X является линией симметрии расположения изохрон и изоазимутов, ибо при повороте на угол ψ в положительном или отрицательном направлении от азимута φ_0 имеем

$$\begin{aligned} U(z, \varphi_0 + \psi) &= U(z, \varphi_0 - \psi) = U(z, \varphi_0) \cos \psi, \\ V(z, \varphi_0 + \psi) &= -V(z, \varphi_0 - \psi) = -U(z, \varphi_0) \sin \psi, \end{aligned}$$

а следовательно для какого-либо наклона θ_0 , принимая во внимание выражения (104) и (105),

$$\left. \begin{aligned} \Xi(\theta_0, \varphi_0 + \psi) &= \Xi(\theta_0, \varphi_0 - \psi), \\ H(\theta_0, \varphi_0 + \psi) &= -H(\theta_0, \varphi_0 - \psi), \\ \tau(\theta_0, \varphi_0 + \psi) &= \tau(\theta_0, \varphi_0 - \psi). \end{aligned} \right\} \quad (149)$$

Нетрудно убедиться в справедливости обратного утверждения: если изохроны имеют ось симметрии, проходящую через начало координат, то направление этой оси показывает неизменяемое с высотой направление ветра.

В самом деле, из условий (149) симметрии распределения изохрон относительно направления φ_0 следует, что $H(\varphi_0) = 0$ независимо от θ_0 , а следовательно $\bar{f}_2 = 0$, т. е. ось X азимута φ_0 ортогональна изохронам. Кроме того, в силу (104) имеем уравнение

$$\int_0^h \frac{V(m_0 - U)}{c \sqrt{(m_0 - U)^2 - c^2}} dz = 0,$$

которое при произвольном распределении $\eta(z) = c(z) + U(z)$, но обеспечивающем возникновение любого из трех видов зоны слышимости, приводит к решению

$$V(z) = -u(z) \sin \varphi_0 + v(z) \cos \varphi_0 = 0,$$

т. е. показывает, что

$$\frac{v(z)}{u(z)} = \operatorname{tg} \varphi_0 = \text{const.}$$

Этот случай распределения ветровых составляющих наблюдался в нижних слоях атмосферы. Мы вернемся к нему в IV главе при решении обратной задачи.

Наконец, если $u(z) = v(z) = 0$, то очевидно прямая из начала координат произвольного направления является изоазимутом, ортогональным изохронам, представляющим семейство концентрических окружностей.

Для изучения расположения сети линий Γ_{φ_0} , Γ_{τ} в какой-либо области зоны слышимости, выберем независимыми параметрами луча τ и φ_0 и определим положительные направления касательной к Γ_{φ_0} в сторону возрастания τ и касательной к Γ_{τ} в сторону роста φ_0 . Очевидно касательные к Γ_{φ_0} в старой системе переменных (θ_0, φ_0) и новой (τ, φ_0) или совпадают или прямо противоположны, ибо $\frac{\partial \tau}{\partial \theta_0} = -2 \frac{\partial m_0}{\partial \theta_0} \bar{f}_1$, причем они совпадают при $\bar{f}_1 < 0$ и отличаются направлением при $\bar{f}_1 > 0$. Составим функциональный определитель $\frac{D(\xi, \eta)}{D(\tau, \varphi_0)}$. Преобразовывая ξ, η к новым переменным и пользуясь таблицей производных (117), (118) и (119) найдем

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(\tau, \varphi_0)} = \frac{D(\xi, \eta)}{D(\theta_0, \varphi_0)} : \frac{D(\tau, \varphi_0)}{D(\theta_0, \varphi_0)} = -\frac{2 m_0 E_0}{\bar{f}_1}. \quad (150)$$

Из этого выражения следует, что прямое расположение линий Γ_{φ_0} , Γ_{τ} имеет место в тех областях зоны, где значения E_0 и $\bar{f}_1$ имеют противоположные знаки, т. е. в случаях а) $E_0 > 0$, $\bar{f}_1 < 0$, б) $E_0 < 0$, $\bar{f}_1 > 0$. Наоборот, обратное расположение этих линий имеется в областях одинаковых знаков E_0 и $\bar{f}_1$, т. е. в случае в) $E_0 > 0$, $\bar{f}_1 > 0$, ибо знакосочетание $E < 0$, $\bar{f}_1 < 0$ невозможно (§ 12). В случаях б) и в) в силу неравенства $\bar{f}_1 > 0$ направление касательной к Γ_{φ_0} в старой системе независимых параметров (θ_0, φ_0) противоположно направлению той же касательной в новой системе параметров (τ, φ_0) , а следова-

тельно расположение линии Γ_{φ_0} в старом ее определении с линией Γ_{τ} оказывается прямым при $E_0 > 0$ и обратным при $E_0 < 0$, т. е. при образовании фокусов на соответствующих лучах (фиг. 9, 10, 11, 12, 13). Очевидно во всех случаях касательные к Γ_{τ} перпендикулярны своим азимутальным направлениям. В точках линии $|\bar{f}_1(\theta_0, \varphi_0) = 0$ экстремальных значений Ξ направления касательных к Γ_{φ_0} и Γ_{τ} совпадают (фиг. 10, 11, 12, 13), что следует из (142), ибо в этих точках $\cos \omega = 1$.

Что касается семейства линий Γ_h , определяемых системой (109) и уравнением

$$\frac{c_0}{\cos \theta_0} + U_0 - c(h) - U(h) = 0, \quad (151)$$

то несмотря на очень большое практическое значение этих линий для разрешения обратной задачи, подметить какие-либо особые их свойства, позволяющие построить это семейство по линиям Γ_{φ_0} или Γ_{τ} , не удастся. Ограничимся здесь лишь указанием некоторых дифференциальных выражений для сети кривых Γ_{φ_0} , Γ_h :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial h} &= -2 |\bar{H}_1| \eta'(h), \\ \frac{\partial \eta}{\partial h} &= -2 |\bar{H}_2| \eta'(h), \\ \frac{\partial \tau}{\partial h} &= -2 |\bar{f}_1| \eta'(h), \end{aligned} \right\} \quad (152)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \eta'(h) &= c'(h) + U'(h); \\ \frac{\partial \xi}{\partial \varphi_0} &= -2 V(h) |\bar{H}_1| + 2 m_0 |\bar{f}_2| \cos \varphi_0 - 2 \sin \varphi_0 (|\bar{f}_3| + |\bar{f}_4|), \\ \frac{\partial \eta}{\partial \varphi_0} &= -2 V(h) |\bar{H}_2| + 2 m_0 |\bar{f}_2| \sin \varphi_0 + 2 \cos \varphi_0 (|\bar{f}_3| + |\bar{f}_4|), \\ \frac{\partial \tau}{\partial \varphi_0} &= -2 V(h) |\bar{f}_1| + 2 |\bar{f}_2|, \end{aligned} \right\} \quad (153)$$

причем $|\bar{H}_1|$ и $|\bar{H}_2|$ определяются из (119).

Определитель, характеризующий расположение семейства Γ_{φ_0} , Γ_h , представится в виде

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(h, \varphi_0)} = 4 m_0 E_0 \eta'(h). \quad (154)$$

Так как $\eta'(h) > 0$, то следовательно расположение линий Γ_{φ_0} , Γ_h подобно расположению Γ_{φ_0} , Γ_0 со всеми их особенностями.

Отметим, наконец, угол, образованный линиями Γ_{τ} , Γ_h :

$$\cos(h, \tau) = \frac{|\bar{f}_3| + |\bar{f}_4| - V(h) |\bar{f}_2|}{\sqrt{m_0^2 [V(h) |\bar{f}_1| - |\bar{f}_2|]^2 + [(|\bar{f}_3| + |\bar{f}_4|) - V(h) |\bar{f}_2|]^2}}. \quad (155)$$

§ 15

Чтобы иллюстрировать изложенную в этой главе теорию звуковых лучей, их расположение в пространстве, образование ими зон слышимости, расположение семейств различных линий в областях слышимости и построение годографов для разных азимутальных направлений, рассмотрим следующий при-

мер линейного с высотой распределения скорости звука и линейного распределения скорости ветра постоянного азимута*.

Пусть распределение скорости звука задано уравнением

$$c = c_0 + ah, \quad (156)$$

где c_0 — скорость звука в приземном слое, a — постоянный градиент скорости.

Распределение же ветра в некотором постоянном азимуте ψ пусть задано уравнением:

$$w = a + bh,$$

где a — скорость ветра в приземном слое, b — постоянный градиент скорости. Составляющие ветра распределены с высотой, очевидно, следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} u &= (a + bh) \cos \psi, \\ v &= (a + bh) \sin \psi. \end{aligned} \right\} \quad (157)$$

При таком распределении $c(h)$, $u(h)$, $v(h)$ звуковые лучи, зондируя атмосферу, могут вернуться на земную поверхность лишь при условии

$$m_0 = \eta(h) = (c_0 + a \cos \gamma) + (a + b \cos \gamma)h > c_0 + a \cos \gamma,$$

где

$$\gamma = \varphi_0 - \psi, \quad (158)$$

т. е. при условии

$$a + b \cos \gamma > 0. \quad (159)$$

Функция „состояния“ $\eta(h)$ — прямая с угловым коэффициентом $a + b \cos \gamma > 0$.

Таким образом, условие (159) является признаком лучей 2-го типа. Наоборот, неравенство $a + b \cos \gamma \leq 0$ является признаком лучей 1-го или 3-го типа. Следовательно, при заданных a , b , ψ зона слышимости может быть определена границами сектора, внутри которого выполняется условие (159).

Внося выражение (156) и (157) в первые части (109) и (105), где θ определяется из (106), найдем после выполнения интегриации следующие выражения для ξ , η , τ :

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{2[(1-n^2) \cos \varphi_0 - n^2 \sin \varphi_0 \operatorname{tg} \gamma]}{1-n^2} \sqrt{[k + (1+n)h]^2 - k^2} + \\ &\quad + \frac{2b(k+h) \sin \varphi_0 \sin \gamma}{a(1-n) \sqrt{1-n^2}} \arccos \left(\frac{k+nh}{k+h} \right) + \tau(a-bk) \cos \psi, \\ \eta &= \frac{2[(1-n^2) \sin \varphi_0 + n^2 \cos \varphi_0 \operatorname{tg} \gamma]}{1-n^2} \sqrt{[k + (1+n)h]^2 - k^2} - \\ &\quad - \frac{2b(k+h) \cos \varphi_0 \sin \gamma}{a(1-n) \sqrt{1-n^2}} \arccos \left(\frac{k+nh}{k+h} \right) + \tau(a-bk) \sin \psi, \\ \tau &= \frac{-2b \cos \gamma}{a^2 \sqrt{1-n^2}} \arccos \left(\frac{k+nh}{k+h} \right) + \frac{2}{a} \operatorname{Arch} \left[\frac{k + (1+n)h}{k} \right], \end{aligned} \right\} \quad (160)$$

где $k = \frac{c_0}{a}$, $n = \frac{b \cos \gamma}{a}$.

Эти уравнения справедливы для $|n| < 1$. Для азимутов, удовлетворяющих неравенству $n > 1$, уравнения (160) преобразуются заменой

$$i \arccos \left(\frac{k+nh}{k+h} \right) = \operatorname{Arch} \left(\frac{k+nh}{k+h} \right)$$

* См. [48], стр. 324—334.

в следующие:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= -\frac{2[(1-n^2)\cos\varphi_0 - n^2\sin\varphi_0\operatorname{tg}\gamma]}{n^2-1} \sqrt{[k+(1+n)h]^2 - k^2} - \\ &\quad - \frac{2b(k+h)\sin\varphi_0\sin\gamma}{a(n-1)\sqrt{n^2-1}} \operatorname{Arch}\left(\frac{k+nh}{k+h}\right) + \tau(a-bk)\cos\psi, \\ \eta &= \frac{-2[(1-n^2)\sin\varphi_0 + n^2\cos\varphi_0\operatorname{tg}\gamma]}{n^2-1} \sqrt{[k+(1+n)h]^2 - k^2} + \\ &\quad + \frac{2b(k+h)\cos\varphi_0\sin\gamma}{a(n-1)\sqrt{n^2-1}} \operatorname{Arch}\left(\frac{k+nh}{k+h}\right) + \tau(a-bk)\sin\psi, \\ \tau &= \frac{-2b\cos\gamma}{a^2\sqrt{n^2-1}} \operatorname{Arch}\left(\frac{k+nh}{k+h}\right) + \frac{2}{a} \operatorname{Arch}\left[\frac{k+(1+n)h}{k}\right]. \end{aligned} \right\} \quad (161)$$

Наконец, для φ_0 , удовлетворяющего условию $n=1$, уравнения для ξ , η , τ напишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{12\cos\varphi_0(k+h) + 2\sin\varphi_0\operatorname{tg}\gamma(3k+4h)}{3\sqrt{kh+h^2}} h + \tau(a-bk)\cos\psi, \\ \eta &= \frac{12\sin\varphi_0(k+h) - 2\cos\varphi_0\operatorname{tg}\gamma(3k+4h)}{3\sqrt{kh+h^2}} h + \tau(a-bk)\sin\psi, \\ \tau &= \frac{-2h}{a\sqrt{kh+h^2}} + \frac{2}{a} \operatorname{Arch}\left(\frac{k+2h}{k}\right). \end{aligned} \right\} \quad (162)$$

Полученные уравнения для ξ , η , τ в функции h , φ_0 позволяют построить семейства ранее изученных линий. Полагая $\varphi_0 = \text{const}$, или $h = \text{const}$, или $\tau = \text{const}$, получим семейства линий соответственно Γ_{φ_0} , Γ_h , Γ_τ . Эти линии, расположенные в зоне слышимости первого вида (§ 13), имеют прямую направления ψ , проходящую через начало координат в качестве оси симметрии, ибо направление ψ является постоянным азимутом скорости ветра (§ 14). Кроме того, линия Γ_ψ совпадает с осью симметрии и ортогональна семейству Γ_τ (§ 14), в чем можно убедиться непосредственно. Уравнения годографов (τ, Ξ) и (τ, H) получим из уравнений (160), (161) и (162), составляя

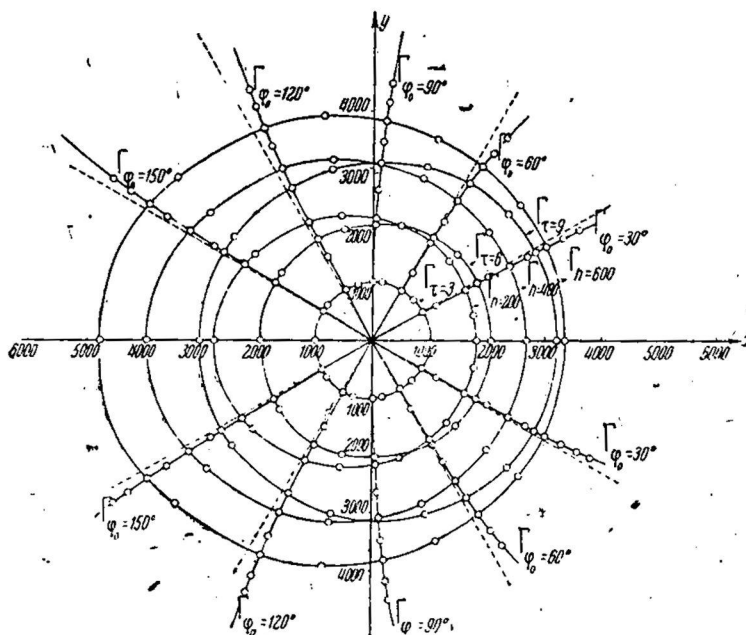
$$\begin{aligned} \Xi &= \xi \cos\varphi_0 + \eta \sin\varphi_0, \\ H &= -\xi \sin\varphi_0 + \eta \cos\varphi_0. \end{aligned}$$

Для азимутов, удовлетворяющих неравенству $|n| < 1$ при тех же обозначениях n и k , получим

$$\left. \begin{aligned} \Xi &= 2\sqrt{[k+(1+n)h]^2 - k^2} + \tau(a-bk)\cos\gamma, \\ H &= \frac{2n^2\operatorname{tg}\gamma}{1-n^2} \sqrt{[k+(1+n)h]^2 - k^2} - \frac{2b(k+h)\sin\gamma}{a(1-n)\sqrt{1-n^2}} \operatorname{arccos}\left(\frac{k+nh}{k+h}\right) - \\ &\quad - \tau(a-bk)\sin\gamma, \end{aligned} \right\} \quad (163)$$

а для направлений, удовлетворяющих неравенству $n > 1$,

$$\left. \begin{aligned} \Xi &= 2\sqrt{[k+(1+n)h]^2 - k^2} + \tau(a-bk)\cos\gamma, \\ H &= \frac{2n^2\operatorname{tg}\gamma}{n^2-1} \sqrt{[k+(1+n)h]^2 - k^2} + \frac{2b(k+h)\sin\gamma}{a(n-1)\sqrt{n^2-1}} \operatorname{Arch}\left(\frac{k+nh}{k+h}\right) - \\ &\quad - \tau(a-bk)\sin\gamma. \end{aligned} \right\} \quad (164)$$



Фиг. 16

Наконец, для направления φ_0 , удовлетворяющего условию $n=1$, получим

$$\left. \begin{aligned} \Xi &= 4 \sqrt{\frac{k+h}{h}} \cdot h + \tau(a-bk) \cos \gamma, \\ H &= -\frac{2 \operatorname{tg} \gamma (3k+4h)}{3 \sqrt{kh+h^2}} h - \tau(a-bk) \sin \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (165)$$

Выражение для τ определяется сообразно азимуту из уравнений (160), (161) или (162). Отметим уравнения годографов для частных направлений $\varphi_0 = \psi$, т. е. $\gamma = 0$ и $\gamma = \frac{\pi}{2}$.

Для $\gamma = 0$ имеем:

$$\left. \begin{aligned} \Xi &= \frac{2}{a} \sqrt{[c_0 + (a+b)h]^2 - c_0^2} + \frac{\tau(aa-bc_0)}{a}, \\ H &= 0, \\ \tau &= \frac{-2b}{a \sqrt{a^2 - b^2}} \arccos \left(\frac{c_0 + bh}{c_0 + ah} \right) + \frac{2}{a} \operatorname{Arch} \left[\frac{c_0 + (a+b)h}{c_0} \right] \text{ при } a > b, \\ \tau &= \frac{-2b}{a \sqrt{b^2 - a^2}} \operatorname{Arch} \left(\frac{c_0 + bh}{c_0 + ah} \right) + \frac{2}{a} \operatorname{Arch} \left[\frac{c_0 + (a+b)h}{c_0} \right] \text{ при } a < b, \\ \tau &= -2 \sqrt{\frac{h}{a(c_0 + ah)}} + \frac{2}{a} \operatorname{Arch} \left(\frac{c_0 + 2ah}{c_0} \right) \text{ при } a = b. \end{aligned} \right\} \quad (166)$$

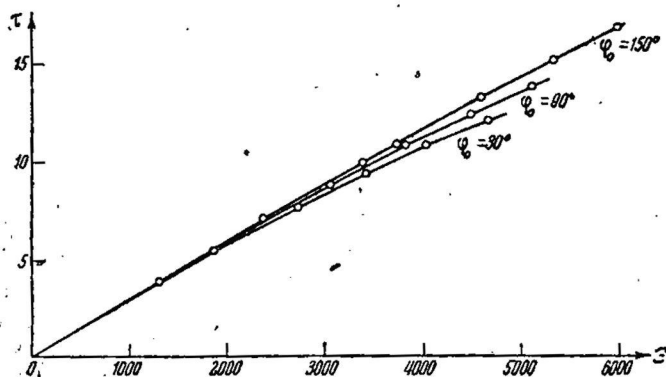
Для $\gamma = \frac{\pi}{2}$:

$$\left. \begin{aligned} \Xi &= \frac{2}{a} \sqrt{(c_0 + ah)^2 - c_0^2}, \\ H &= -\frac{2b(c_0 + ah)}{a^2} \arccos \left(\frac{c_0}{c_0 + ah} \right) - \tau \frac{aa-bc_0}{a}, \\ \tau &= \frac{2}{a} \operatorname{Arch} \left(\frac{c_0 + ah}{c_0} \right). \end{aligned} \right\} \quad (167)$$

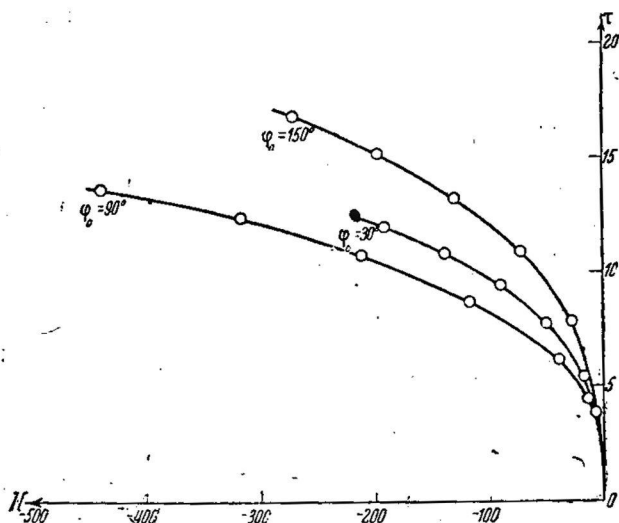
Уравнения (167) справедливы лишь при условии $a > 0$.

Дадим краткую характеристику зон слышимости и их границ в различных предположениях относительно постоянных градиентов a и b .

1) $a > b > 0$. Условие (159) для луча 2-го рода выполнено для всех азимутов и всех наклонений, следовательно зона слышимости заполняет всю плоскость, и лучи зондируют атмосферу любых высот. Изохроны и изовысоты — замкнутые линии. Для наглядного представления распределения этих линий иллюстрируем этот случай числовым искусственным примером следующих значений параметров, где градиент a во много раз преувеличен: $c_0 = 332$; $\tau = 0,12$; $a = 0$; $b = 0,05$; $\psi = 0$.



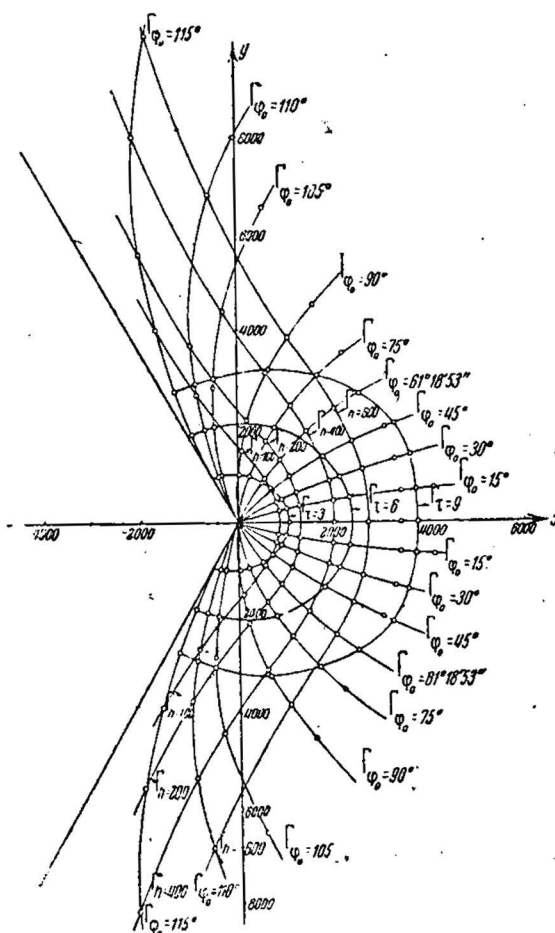
Фиг. 17



Фиг. 18

Расположение линий Γ_{φ_0} , Γ_{τ} , Γ_h дано на фиг. 16. Годографы (τ, z) и (τ, H) для различных азимутов приведены на фиг. 17 и 18*.

* Вычисления и построение кривых как для этого, так и для других примеров, приведенных в настоящей работе, выполнены в вычислительном бюро Математического отдела Института георетической геофизики Академии Наук СССР Б. В. Овчинским и Р. И. Тюркишер, которым автор выражает благодарность.



Фиг. 19

чания являются лучами 1-го типа. К подобной зоне приводят следующие случаи: $-b \geq a > 0$, $b > -a > 0$, $-b > -a > 0$.

3) $-a \geq b > 0$. Ни в одном азимуте не выполняется условие (159), а следовательно зона слышимости отсутствует. К этому случаю приводят условия: $-a \geq -b > 0$, $a < 0$ при $b = 0$, а также $a = 0$, $b = 0$.

4) $a = 0$, $b \neq 0$. В этом случае уравнения (160) и (161) упростятся:

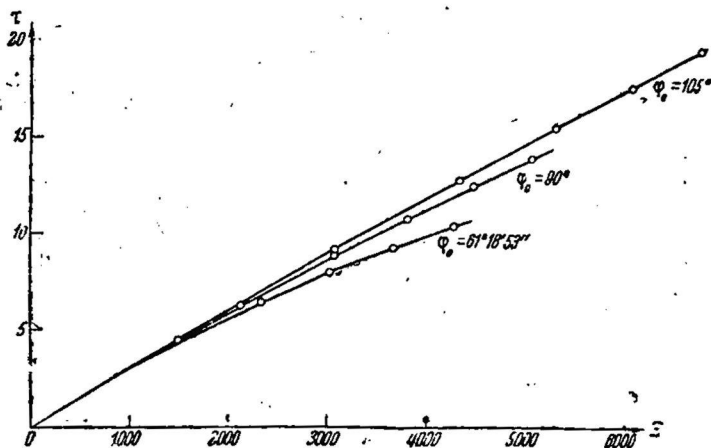
$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{\cos \psi (c_0 + b h \cos \gamma + 2 a \cos \gamma)}{c_0 b \cos^2 \gamma} \sqrt{(c_0 + b h \cos \gamma)^2 - c_0^2} + \\ &\quad + \frac{2 c_0 \cos \gamma \cos \varphi_0 - c_0 \cos \psi}{b \cos^2 \gamma} \text{Arch} \left(\frac{c_0 + b h \cos \gamma}{c_0} \right), \\ \eta &= \frac{\sin \psi (c_0 + b h \cos \gamma + 2 a \cos \gamma)}{c_0 b \cos^2 \gamma} \sqrt{(c_0 + b h \cos \gamma)^2 - c_0^2} + \\ &\quad + \frac{2 c_0 \cos \gamma \sin \varphi_0 - c_0 \sin \psi}{b \cos^2 \gamma} \text{Arch} \left(\frac{c_0 + b h \cos \gamma}{c_0} \right), \\ \tau &= \frac{2}{c_0 b \cos \gamma} \sqrt{(c_0 + b h \cos \gamma)^2 - c_0^2}. \end{aligned} \right\} \quad (168)$$

К подобной зоне приводит случай $a > -b > 0$.

2) $b \geq a > 0$. Обозначим через $\gamma^* = \varphi^* - \psi$ острый угол, для которого $\frac{a}{b} = \cos \gamma^*$; тогда условие (159) удовлетворяется для азимутов φ_0 , лежащих в пределах $\psi \leq \varphi_0 < \pi + \psi - \gamma^*$, и в секторе, симметричном относительно направления ψ . Следовательно образуется зона молчания в виде сектора с осью симметрии направления $\pi + \psi$ и границами — прямыми из начала координат, составляющими с осью ξ углы $\pi + \psi - \gamma^*$ и $\pi + \psi + \gamma^* = \pi + \varphi_0^*$. Изохроны, изовысоты и изоазимуты дают сеть линий в секторе слышимости.

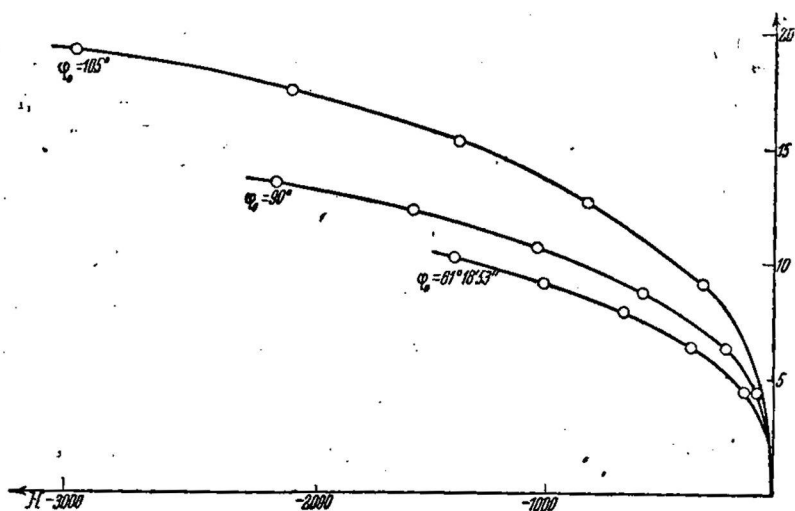
Вновь проиллюстрируем этот случай также искусственным числовым примером с сильно преувеличенными градиентами a и b : $c_0 = 332$; $a = 0,12$; $a = 0$; $b = 0,25$; $\psi = 0$.

Расположение линий Γ_{φ_0} , Γ_r , Γ_h , а также границы зоны слышимости приведены на фиг. 19. Годографы (τ , Ξ) и (τ , H) для разных азимутов показаны на фиг. 20 и 21. Лучи граничных азимутов являются лучами 3-го типа, ибо для этих азимутов $\eta'(h) = a + b \cos \gamma = 0$. Лучи направлений в секторе мол-



Фиг. 20

Условием луча 2-го типа является неравенство $b \cos \gamma > 0$. Зона слышимости заполняет полуплоскость с границей, отделяющей ее от зоны молчания прямой, перпендикулярной азимуту $\varphi_0 = \psi$ и проходящей через начало



Фиг. 21

координат. При $b > 0$ зона слышимости заполняет полуплоскость $-\frac{\pi}{2} < \gamma < \frac{\pi}{2}$. При $b < 0$ зона слышимости взаимно меняется с зоной молчания.

5) Наконец, рассмотрим случай $b = 0$, $a > 0$. В этом случае уравнения (160) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{2}{a} \cos \varphi_0 \sqrt{(c_0 + ah)^2 - c_0^2} + \tau a \cos \psi, \\ \eta &= \frac{2}{a} \sin \varphi_0 \sqrt{(c_0 + ah)^2 - c_0^2} + \tau a \sin \psi, \\ \tau &= \frac{2}{a} \operatorname{Arch} \left(\frac{c_0 + ah}{c_0} \right). \end{aligned} \right\} \quad (169)$$

Во всех направлениях распространяются звуковые лучи 2-го типа, следовательно зона слышимости заполняет всю плоскость. Линии Γ_τ совпадают с линиями Γ_h и представляют семейство окружностей с центрами, лежащими на азимутальной прямой направления ψ :

$$(\xi - \tau u_0)^2 + (\eta - \tau v_0)^2 = \left(\frac{2c_0}{a} \operatorname{sn} h \frac{\tau a}{2} \right)^2, \quad (170)$$

где $u_0 = a \cos \psi$, $v_0 = a \sin \psi$.

Уравнения годографов (τ, Ξ) и (τ, H) получим из (163), полагая $b=0$,

$$\left. \begin{aligned} \Xi &= \tau a \cos \gamma + \frac{2c_0}{a} \operatorname{sn} h \left(\frac{\tau a}{2} \right), \\ H &= -\tau a \sin \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (171)$$

Для $\varphi_0 = \psi$ уравнения (171) напишутся так:

$$\left. \begin{aligned} \Xi &= \tau a + \frac{2c_0}{a} \operatorname{sn} h \left(\frac{\tau a}{2} \right), \\ H &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (172)$$

И наконец, для перпендикулярного азимута $\varphi_0 = \psi + \frac{\pi}{2}$ годографы представляются в виде

$$\left. \begin{aligned} \Xi &= \frac{2c_0}{a} \operatorname{sn} h \left(\frac{\tau a}{2} \right), \\ H &= -\tau a. \end{aligned} \right\} \quad (173)$$

§ 16

Выше в §§ 7 и 10 были приведены уравнения звукового луча (89), время его пробега (90), координаты возврата луча 2-го типа и уравнения годографа (104₁), (105₁) для частного случая спокойного состояния атмосферы, т. е. для случая, когда $u=v=w=0$. Ход звукового луча в этом случае характеризуется теми же уравнениями, как в упругой твердой среде для продольных и поперечных волн в сейсмометрической задаче, так равно и в жидкой спокойной среде, например, в глубоких водоемах. В этом случае имеем более простое распределение конгруэнции лучей и семейств линий Γ_{φ_0} , Γ_τ , Γ_h в зоне слышимости. В § 7 уже отмечалось, что звуковые лучи являются плоскими кривыми, не зависящими от азимута. Следовательно поверхности конгруэнции $\varphi_0 = \text{const}$ — плоскости, пересекающие земную поверхность по прямым Γ_{φ_0} , выходящим из начала координат под углом φ_0 . Поверхности конгруэнции $\tau = \text{const}$ и $h = \text{const}$ суть поверхности вращения вокруг оси z траектории луча, имеющего τ — время пробега, и соответственно зондирующего высоту h атмосферы. Следовательно линии Γ_τ , Γ_h — окружности. Таким образом, линии Γ_{φ_0} , Γ_τ , а также Γ_{φ_0} , Γ_τ представляют ортогональное семейство радиальных прямых и окружностей.

Годограф (τ, Ξ) , определяемый в параметрической форме уравнениями (104₁) и (105₁), не зависит от азимута. Годограф (τ, H) — прямая $H=0$.

Фокальные поверхности конгруэнции лучей также являются поверхностями вращения огибающей лучей $\varphi_0 = \text{const}$, ибо фокусы конгруэнции совпадают с характеристическими точками лучей $\varphi_0 = \text{const}$. Так как $|\bar{f}_2| = |\bar{f}_3| = 0$ и $|\bar{f}_4| > 0$ (121), то $E_0(\theta_0) = -|\bar{f}_1| |\bar{f}_4|$ (124), следовательно необходимым и достаточным условием (126) появления фокуса на нисходящей ветви луча является неравенство $|\bar{f}_1| \geq 0$ или в раскрытом виде

$$\int_0^h \frac{Q(z) - Q(h)}{(h-z)^{\frac{1}{2}}} dz - \frac{2Q(h)}{h^{\frac{1}{2}}} \geq 0, \quad (174)$$

где

$$\left. \begin{aligned} Q(z) &= \frac{c(z)}{\{[c(h) + c(z_2)]c'(z_1)\}^{\frac{3}{2}}} > 0, \\ Q(h) &= \frac{1}{2\sqrt{2c(h)}[c'(h)]^{\frac{3}{2}}} > 0. \end{aligned} \right\} \quad (175)$$

Из выражений (174) и (175) следует, что изменение знака $|\bar{f}_1$ с отрицательного на положительный, т. е. появление фокуса на звуковом луче, зависит от величины $c'(h)$ — градиента скорости звука на высоте проникновения луча. При достаточно большом росте $c(z)$ в смежности с высотой проникновения луча, т. е. при достаточно больших значениях $c'(z)$ для z в соседстве с h отрицательные слагаемые (174) могут получить значения настолько малые, что $|\bar{f}_1| \geq 0$. Наоборот, при падении с высотой градиента $c'(h)$, т. е. при $c''(h) < 0$, наверное $|\bar{f}_1| < 0$, т. е. фокусы на луче отсутствуют. Последнее видно из иного выражения для $|\bar{f}_1|$:

$$|\bar{f}_1| = \int_0^h \frac{c''(z) dz}{c'^2(z) \sqrt{c^2(h) - c^2(z)}} - \frac{1}{c'(0) \sqrt{c^2(h) - c^2(0)}}. \quad (176)$$

Условие $|\bar{f}_1| < 0$ является вместе с тем условием Якоби для сильного экстремума вариационной задачи для звукового луча в спокойной атмосфере.

§ 17

В § 6 были установлены законы преломления и отражения звуковых волн на плоской границе раздела двух различных состояний атмосферы в предположении, что поверхность раздела является нестационарной поверхностью разрыва первого порядка, и в другом предположении, что граница является стационарной поверхностью разрыва нулевого порядка. В случае нестационарного характера поверхности разрыва последняя сама перемещается с некоторой скоростью w , отличной от вертикальных составляющих скоростей частиц в нижнем и верхнем слоях, непосредственно граничащих с плоскостью разрыва первого порядка.

Опираясь на приведенную в § 10 оценку малого влияния вертикального тока на распределение лучей и образование зон слышимости в силу незначительности величин скоростей вертикальных перемещений, мы можем в вопросе изучения влияния поверхности разрыва на ход звуковых лучей приближенно полагать вертикальные составляющие незначительными и отбросить вторые слагаемые в уравнении (78), после чего законы преломления и отражения от плоской границы разрыва первого порядка примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{c_1}{\cos \theta_i} &= \frac{c_2}{\cos \theta_s}, \\ \cos \theta_i &= \cos \theta_r. \end{aligned} \right\} \quad (177)$$

Сопоставляя (177) с законами преломления (80) и отражения (81) от границы раздела нулевого порядка, видим, что для отраженного луча справедлив закон Декарта. Что же касается закона преломления, то замечая, что в слу-

чае границы раздела первого порядка касательные составляющие при переходе через границу раздела меняются непрерывно, т. е. $U_1 = U_2$, мы можем независимо от природы преломляющей поверхности записать этот закон одним уравнением

$$\frac{c_1}{\cos \theta_i} + U_1 = \frac{c_2}{\cos \theta_s} + U_2 = \frac{c_0}{\cos \theta_0} + U_0 = m_0. \quad (178)$$

Присоединяя к уравнению (178) закон отражения

$$\cos \theta_i = \cos \theta_r \quad (179)$$

и условие сохранения азимута φ_0 при преломлении или отражении луча (72), изучим конгруэнцию лучей (θ_0, φ_0) и образованные лучами 2-го типа зоны слышимости. Обозначим через h' высоту границы раздела состояний атмосферы. Функция

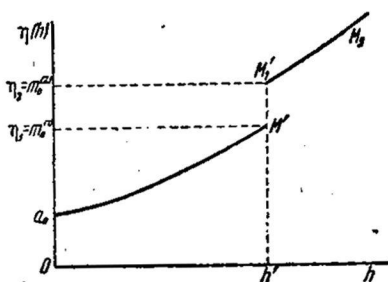
$$\eta(h, \varphi_0) = c(h) + u(h) \cos \varphi_0 + v(h) \sin \varphi_0,$$

заданная в интервале $0 \leq h < h'$, определит, согласно ранее изложенному, конгруэнцию лучей, зондирующих слои атмосферы до границы раздела и соответствующие зоны слышимости. Обозначим предельное значение $\eta(h, \varphi_0)$ при $h \rightarrow h'$ со стороны $h < h'$ через

$$\eta_1 = c_1 + u_1 \cos \varphi_0 + v_1 \sin \varphi_0 = c_1 + U_1 = m_0^{(1)}$$

и предельное значение $\eta(h, \varphi_0)$ со стороны $h > h'$ через

$$\eta_2 = c_2 + u_2 \cos \varphi_0 + v_2 \sin \varphi_0 = c_2 + U_2 = m_0^{(2)}.$$



Фиг. 22

В зависимости от выбранного азимута вообще могут иметь место два случая:

1) $\eta_2 > \eta_1$ и 2) $\eta_2 < \eta_1$.

1) Пусть $\eta_2 > \eta_1$, тогда ход функции $\eta(h, \varphi_0)$ для выбранного азимута φ_0 представится кривой, изображенной на фиг. 22. Очевидно, при $m_0 = m_0^{(1)}$ получим предельный луч 2-го типа, зондирующий высоту h' . Рассмотрим какой-либо луч с наклоном θ_0 , для которого $m_0^{(2)} > m_0 \geq m_0^{(1)}$.

Звуковой луч, выходящий из источника под углом θ_0 и удовлетворяющий уравнению

$$\frac{c_0}{\cos \theta_0} + U_0 = m_0 \geq m_0^{(1)},$$

падает на границу раздела с наклоном $\theta_i \geq 0$, ибо из (178) следует

$$\frac{c_1}{\cos \theta_i} + U_1 = m_0 \geq \eta_1 = c_1 + U_1.$$

В силу (178) и условия $\eta_2 = m_0^{(2)} > m_0 \geq m_0^{(1)} = \eta_1$ для θ_s имеем неравенство

$$\eta_2 = c_2 + U_2 > \frac{c_2}{\cos \theta_s} + U_2 = m_0 \geq \eta_1,$$

которое показывает, что лучи начальных наклонов, принадлежащих интервалу $\eta_2 > m_0 \geq \eta_1$, не проникают выше границы раздела. Эта группа лучей, дойдя до границы раздела, отразится от последней и вернется на земную поверхность, описав траектории, симметричные восходящим ветвям. Координаты точек возврата этой группы лучей оценятся выражениями, аналогичными (109), (104) и (105):

$$\left. \begin{aligned} \xi_r(m_0) &= 2 \int_0^{h'} \frac{c \cos \theta \cos \varphi_0 + u}{c \sin \theta} dz, \\ \eta_r(m_0) &= 2 \int_0^{h'} \frac{c \cos \theta \sin \varphi_0 + v}{c \sin \theta} dz, \end{aligned} \right\} \quad (180)$$

$$\left. \begin{aligned} \Xi_r(m_0) &= 2 \int_0^{h'} \frac{c^2 + U(m_0 - U)}{c \sqrt{(m_0 - U)^2 - c^2}} dz, \\ H_r(m_0) &= 2 \int_0^{h'} \frac{V(m_0 - U)}{c \sqrt{(m_0 - U)^2 - c^2}} dz, \end{aligned} \right\} \quad (181)$$

$$\tau_r(m_0) = 2 \int_0^{h'} \frac{m_0 - U}{c \sqrt{(m_0 - U)^2 - c^2}} dz, \quad (182)$$

где θ определяется из (106), m_0 принадлежит интервалу $\eta_2 > m_0 \geq \eta_1$. Очевидно выражения (180), (181) и (182) сохраняются и для $m_0 \geq m_0^{(2)} = \eta_2$.

Таким образом, будем иметь на земной поверхности отраженные от границы раздела лучи с координатами их возвращения (180) или (181) и временем пробега (182), где $\eta_1 \leq m_0 < \infty$. Нетрудно установить следующую таблицу производных $\xi_r, \eta_r, \Xi_r, H_r, \tau_r$ по параметрам θ_0, φ_0 , аналогичную (117), (118), (119) и (120) для $m_0 > \eta_1$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \xi_r}{\partial \theta_0} &= -2 \frac{\partial m_0}{\partial \theta_0} H_1, \\ \frac{\partial \eta_r}{\partial \theta_0} &= -2 \frac{\partial m_0}{\partial \theta_0} H_2, \\ \frac{\partial \tau_r}{\partial \theta_0} &= -2 \frac{\partial m_0}{\partial \theta_0} f_1, \\ \frac{\partial \Xi_r}{\partial \theta_0} &= -2 m_0 \frac{\partial m_0}{\partial \theta_0} f_1, \\ \frac{\partial H_r}{\partial \theta_0} &= -2 \frac{\partial m_0}{\partial \theta_0} f_2, \end{aligned} \right\} \quad (183)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \xi_r}{\partial \varphi_0} &= -2 V_0 H_1 + 2 m_0 f_2 \cos \varphi_0 - 2 \sin \varphi_0 (f_3 + f_4), \\ \frac{\partial \eta_r}{\partial \varphi_0} &= -2 V_0 H_2 + 2 m_0 f_2 \sin \varphi_0 + 2 \cos \varphi_0 (f_3 + f_4), \\ \frac{\partial \tau_r}{\partial \varphi_0} &= -2 V_0 f_1 + 2 f_2, \\ \frac{\partial \Xi_r}{\partial \varphi_0} &= -2 m_0 (V_0 f_1 - f_2) + H_r, \\ \frac{\partial H_r}{\partial \varphi_0} &= -2 V_0 f_2 + 2 f_3 + 2 f_4 - \Xi_r, \end{aligned} \right\} \quad (184)$$

где

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= m_0 f_1 \cos \varphi_0 - f_2 \sin \varphi_0, \\ H_2 &= m_0 f_1 \sin \varphi_0 + f_2 \cos \varphi_0, \end{aligned} \right\} \quad (185)$$

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \int_0^{h'} \frac{dz}{c^2 \operatorname{tg}^3 \theta} = \int_0^{h'} \frac{c \, dz}{[(m_0 - U)^2 - c^2]^{\frac{3}{2}}}, \\ f_2 &= \int_0^{h'} \frac{V dz}{c^2 \operatorname{tg}^3 \theta} = \int_0^{h'} \frac{V c \, dz}{[(m_0 - U)^2 - c^2]^{\frac{3}{2}}}, \\ f_3 &= \int_0^{h'} \frac{V^2 dz}{c^2 \operatorname{tg}^3 \theta} = \int_0^{h'} \frac{V^2 c \, dz}{[(m_0 - U)^2 - c^2]^{\frac{3}{2}}}, \\ f_4 &= \int_0^{h'} \frac{dz}{\operatorname{tg} \theta} = \int_0^{h'} \frac{c \, dz}{\sqrt{(m_0 - U)^2 - c^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (186)$$

Так как $\frac{\partial m_0}{\partial \theta_0} > 0$ и $f_1 > 0$, то $\frac{\partial \Xi_r}{\partial \theta_0} < 0$, $\frac{\partial \tau_r}{\partial \theta_0} < 0$. Следовательно зона слышимости отраженных лучей, имея внешнюю границу, совпадающую с границей слышимости от предельных лучей, зондирующих высоту h' , непрерывно заполняет внутреннюю область, включающую источник. Может оказаться, что внешняя граница для некоторых направлений бесконечно удалена, например, для направлений φ_0 , для которых $\left(\frac{d\eta}{dz}\right)_{m_0^{(1)}} = 0$.

Полагая $\varphi_0 = \text{const}$ или $\theta_0 = \text{const}$ в уравнениях (180), получим семейства линий Γ_{φ_0} и соответственно Γ_{θ_0} . Для изучения распределения этих линий в зоне слышимости отраженных лучей составим функциональный определитель

$$D = \frac{D(\xi_r, \eta_r)}{D(\theta_0, \varphi_0)} = 4m_0' \frac{\partial m_0}{\partial \theta_0} E, \quad (187)$$

где

$$E = f_2^2 - f_1(f_3 + f_4). \quad (188)$$

Пользуясь выражениями (186) и обозначая через

$$F(z) = \frac{1}{c^2 \operatorname{tg}^3 \theta} = \frac{c}{[(m_0 - U)^2 - c^2]^{\frac{3}{2}}} > 0,$$

составим разность

$$f_2^2 - f_1 f_3 = \int_0^{h'} dz_1 \int_0^{h'} F(z) F(z_1) V(z_1) [V(z) - V(z_1)] dz.$$

После простых преобразований правой части* получим

* См. [50], стр. 298—299.

$$f_2^2 - f_1 f_3 = - \int_0^{h'} dz \int_0^{h'} F(z) F(z_1) [V(z) - V(z_1)]^2 dz_1 < 0,$$

следовательно $E < 0$.

Нетрудно убедиться, что отраженные лучи не имеют фокусов ни на восходящих, ни на нисходящих ветвях, так же как не имеет огибающей семейство проекций лучей на азимутальную плоскость $\varphi_0 = \text{const}$. Линии Γ_{φ_0} , Γ_{θ_0} имеют всюду в зоне слышимости отраженных лучей обратное расположение при положительном направлении Γ_{φ_0} в сторону возрастания θ_0 , т. е. в сторону приближения к источнику.

Введя на ряду с линиями Γ_{φ_0} , Γ_{θ_0} семейство изохрон Γ_{τ} , можно установить те же дифференциальные свойства изохрон отраженных лучей, которые раньше в § 14 были установлены для изохрон лучей 2-го типа, а именно: касательная к изохроне в какой-нибудь точке перпендикулярна направлению азимута φ_0 , под которым вышел луч из источника и который, отразившись от границы раздела, вернулся на земную поверхность в выбранную точку; следовательно в каждой точке изохроны лучей отраженных и лучей 2-го типа, зондирующих высоты $h < h'$, соприкасаются.

Это свойство позволяет построить два годографа отраженных лучей (τ_r, Ξ_r) и (τ_r, H_r) аналогично построению годографов в § 14 для лучей 2-го типа. Угловой коэффициент годографа (τ_r, Ξ_r) будет

$$\frac{d\tau_r}{d\Xi_r} = \frac{1}{m_0}. \quad (189)$$

Так как $\frac{d^2 \tau_r}{d\Xi_r^2} = \frac{1}{2m_0^3 f_1} > 0$, то годограф отраженных лучей обращен к оси Ξ выпуклостью. Нормальный к земной поверхности луч $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ возвращается после отражения с координатами и временем пробега

$$\left. \begin{aligned} \Xi_0 &= 2 \int_0^{h'} \frac{U}{c} dz, \\ H_0 &= 2 \int_0^{h'} \frac{V}{c} dz, \\ \tau_0 &= 2 \int_0^{h'} \frac{dz}{c}. \end{aligned} \right\} \quad (190)$$

Однако для наклонов θ_0 , удовлетворяющих условию $m_0 > \eta_2 = m_0^{(2)}$, помимо отраженных лучей, на границе h' будут возникать лучи преломленные, ибо из закона преломления (178) непосредственно следует, что

$$\frac{c_2}{\cos \theta_s} + U_2 = m_0 = \frac{c_0}{\cos \theta_0} + U_0 > c + U_2 = \eta_2. \quad (191)$$

Углы θ_s преломленных лучей удовлетворяют условию (191). Легко видеть, что $\theta_s < \theta_i$. Ход преломленных лучей в среде, лежащей выше границы раздела, определяется функцией $\eta(h, \varphi_0)$ для $h > h'$. Восходящая и нисходящая ветви этих лучей симметричны относительно вертикали, проходящей через вершину луча. Координаты точки возврата и время пробега преломленного луча в силу условия (178) примут следующие выражения при $h > h'$:

$$\left. \begin{aligned} \Xi_s &= 2 \int_0^h \frac{c^2 + U(m_0 - U)}{c \sqrt{(m_0 - U)^2 - c^2}} dz = \Xi_r(m_0) + 2 \int_{h'}^h \frac{c^2 + U(m_0 - U)}{c \sqrt{(m_0 - U)^2 - c^2}} dz, \\ H_s &= 2 \int_0^h \frac{V(m_0 - U)}{c \sqrt{(m_0 - U)^2 - c^2}} dz = H_r(m_0) + 2 \int_{h'}^h \frac{V(m_0 - U)}{c \sqrt{(m_0 - U)^2 - c^2}} dz, \\ \tau_s &= 2 \int_0^h \frac{m_0 - U}{c \sqrt{(m_0 - U)^2 - c^2}} dz = \tau_r(m_0) + 2 \int_{h'}^h \frac{m_0 - U}{c \sqrt{(m_0 - U)^2 - c^2}} dz. \end{aligned} \right\} \quad (192)$$

Из выражений (192) следует, что поведение функций Ξ_s , H_s , τ_s и их производных для преломленных во второй среде лучей определится в основном вторыми слагаемыми правых частей, свойства которых зависят от хода функций $\eta(h, \varphi_0)$ для $h \geq h'$. Свойства, установленные в § 9, для лучей 2-го типа, могут быть перенесены на вторые слагаемые (192) и их производные.

Так, для функции $\eta(h)$, представленной на фиг. 22, где $\left(\frac{d\eta}{dz}\right)_{m_0^{(2)}} \neq 0$, имеем:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow h'} \Xi_s &= \Xi_r(\eta_2) < \Xi_r(\eta_1) = \Xi_1, \\ \lim_{h \rightarrow h'} H_s &= H_r(\eta_2) < H_r(\eta_1) = H_1, \\ \lim_{h \rightarrow h'} \tau_s &= \tau_r(\eta_2) < \tau_r(\eta_1) = \tau_1. \end{aligned}$$

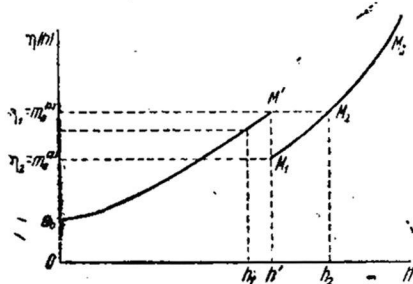
При $h > h'$ в соседстве с h' для той же функции $\eta(h)$ имеем

$$\frac{\partial \Xi_s}{\partial \theta_0} > 0,$$

$$\frac{\partial \tau_s}{\partial \theta_0} > 0.$$

Следовательно преломленные лучи заполняют зону слышимости, примыкающую к зоне отраженных лучей и являющуюся продолжением последней, частично ее перекрывая. Распределение линий Γ_{τ_0} , Γ_{θ_0} , Γ_{τ} , Γ_h в зоне преломленных лучей подчиняется свойствам этих линий для лучей 2-го типа в первой среде.

В итоге получим довольно сложное наложение зоны первичной (от лучей 2-го типа, зондирующих первую среду), зоны отраженных лучей и, наконец, вторичной зоны (лучей 2-го типа, зондирующих вторую среду). Не менее сложными могут оказаться годографы (τ, Ξ) и (τ, H) , составленные из ветвей,



Фиг. 23

соединяющихся в точках возврата первого рода. Область наложения первичной и вторичной зон зависит от скачка разрыва функции $\eta(z, \varphi_0)$ в соответствующем интервале значений азимутов φ_0 .

2) Пусть $\eta_1 > \eta_2$ в точке $h = h'$ (фиг. 23).

В этом случае, так же как и в 1), на границе раздела h' возникнут отраженные лучи для начальных наклонов θ_0 , удовлетворяющих неравенству $\eta_1 \leq m_0 < \infty$, которые определяют зону слышимости отраженных лучей, описанную в анализе 1) случая. Помимо отраженных лучей на границе раздела возникнут преломленные лучи, зондирующие высоты $h > h'$

и определяющие вторичные зоны слышимости. Последнюю зону можем рассматривать как предельный случай зоны третьего вида (§ 13), когда

очка M_1 минимума кривой $\eta(z)$ стремится занять положение на ординате $h' M'$ (фиг. 5 и 23) с той разницей, что вообще $\left(\frac{d\eta}{dz}\right)_{m_0(h')} \neq 0$, а следовательно предельный луч, зондирующий высоту h' и принадлежащий семейству лучей, проникающих на высоты $h < h'$, может не оказаться лучом 3-го типа. Совокупность таких предельных лучей различных азимутов, для которых выполняется условие $\eta_1 > \eta_2$, определит границу $\Gamma_{h'}$ первичной зоны слышимости, точки которой могут находиться на ограниченных удалениях от источника.

Рассмотрим какой-либо луч наклона θ_0 , удовлетворяющего условию $\eta_0 \geq \eta_1$. Этот луч падает на границу раздела под углом $\theta_i \geq 0$. В силу (178) и неравенства $\eta_1 > \eta_2$ имеем

$$\frac{c_2}{\cos \theta_s} + U_2 = \frac{c_1}{\cos \theta_i} + U_1 = m_0 \geq \eta_1 > \eta_2 = c_2 + U_2,$$

откуда следует, что на границе h' возникнет преломленный луч наклона $\theta_s > \theta_i$, проникающий на высоты $h \geq h_2$, где h_2 подчиняется условию $\eta(h_2) = \eta(h') = \eta_1$.

Форма вторичной зоны и распределение в ней линий Γ_{φ_0} , Γ_{θ_0} , Γ_{τ} , Γ_h определяется функцией $\eta(h, \varphi_0)$ для $h > h_2$. Таким образом, слои атмосферы на высотах $h' < h < h_2$ вовсе не отражают звуковые лучи, что влечет образование зоны молчания. В самом деле, координаты предельного луча, зондирующего высоту h_2 и принадлежащего семейству лучей, проникающих на высоты $h \geq h_2$, а также время его пробега оценятся следующими выражениями

$$\left. \begin{aligned} E_s &= 2 \int_0^{h_2} \frac{c^2 + U(m_0 - U)}{c \sqrt{(\eta_1 - U)^2 - c^2}} dz = E_1 + 2 \int_{h'}^{h_2} \frac{c^2 + U(m_0 - U)}{c \sqrt{(\eta_1 - U)^2 - c^2}} dz, \\ H_s &= 2 \int_0^{h_2} \frac{V(\eta_1 - U)}{c \sqrt{(\eta_1 - U)^2 - c^2}} dz = H_1 + 2 \int_{h'}^{h_2} \frac{V(\eta_1 - U)}{c \sqrt{(\eta_1 - U)^2 - c^2}} dz, \\ \tau_s &= 2 \int_0^{h_2} \frac{\eta_1 - U}{c \sqrt{(\eta_1 - U)^2 - c^2}} dz = \tau_1 + 2 \int_{h'}^{h_2} \frac{\eta_1 - U}{c \sqrt{(\eta_1 - U)^2 - c^2}} dz, \end{aligned} \right\} \quad (193)$$

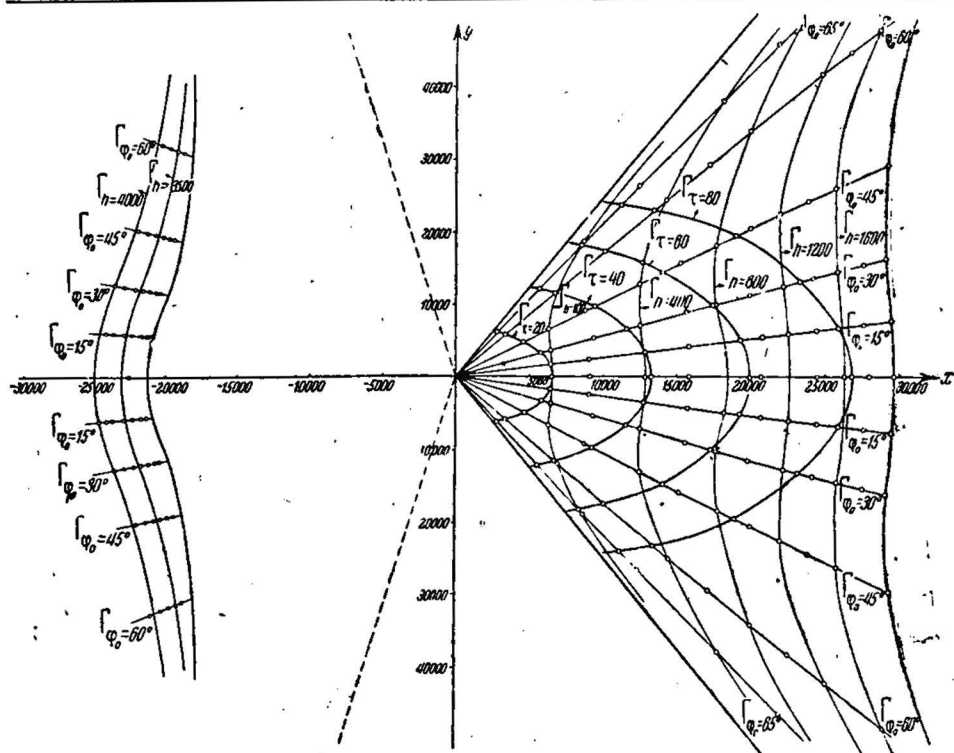
где E_1 , H_1 , τ_1 — координаты предельного луча для совокупности лучей, зондирующих высоты $h \leq h'$, и время его пробега. Следовательно

$$E_s > E_1, \quad H_s \geq H_1, \quad \tau_s > \tau_1,$$

так как второе слагаемое H_s зависит от распределения ветра в слое (h', h_2) .

Таким образом, для интервала азимутов, в которых выполняется неравенство $\eta_1 > \eta_2$, возникнет зона молчания, обусловленная наличием разрыва функции „состояния“ $\eta(h, \varphi_0)$ на некоторой высоте, и так как при $\eta'(z) \neq 0$, $h_2 \rightarrow h'$ вместе с $\eta_1 - \eta_2 \rightarrow 0$, то $E_s \rightarrow E_1$, $H_s \rightarrow H_1$, $\tau_s \rightarrow \tau_1$ при $\eta_1 - \eta_2 \rightarrow 0$. Что касается внешней границы зоны молчания, то таковой, в зависимости от свойства функции $\eta(h, \varphi_0)$ в смежности с $h = h_2$, может быть место, образуемое координатами E_s , H_s (193), если $\frac{\partial E_s}{\partial \theta_0} > 0$, но может оказаться и огибающая семейства Γ_{φ_0} , иначе, геометрическое место фокусов.

Очевидно оба рассмотренных случая могут реализоваться на одной и той же высоте, но в различных азимутах. Для частного случая спокойного состояния атмосферы рассмотренные случаи остаются справедливыми. Разрыв функции $\eta(h)$ в этом случае обуславливается разрывным изменением температуры, следовательно вообще скорости $c(h)$. Зона молчания с границами в виде концентрических окружностей возникает в случае разрывного понижения скорости $c(h)$.



Фиг. 24

Иллюстрируем последний случай образования зон слышимости следующим числовым примером. Допустим, что в слое атмосферы $0 \leq h \leq 2000$ м температура падает так, что скорость $c(h) = c_0 + ah$ убывает с примерно наблюдаемым градиентом. Пусть $c_0 = 332$, $a = -0,0036$. Допустим, что скорость ветра сохраняет на всех высотах направление и линейно растет. В обозначениях § 15 пусть $\psi = 0$, $a = 0$, $b = 0,01$. Таким образом, скорость ветра на высоте $h' = 2000$ м достигает 20 м/сек.

Допустим, что для $2000 \text{ м} \leq h \leq 4000$ м ход функции $c(h)$ сохраняется, а скорость ветра разрывно меняется—падает при $h' = 2000$ м до нуля, и далее растет с иным градиентом $b' = 0,0236$, имея противоположное направление $\psi = \pi$. Этим требованиям удовлетворим, приняв для второго слоя в тех же обозначениях и отсчитывая высоты от земной поверхности $c_0 = 332$, $a = -0,0036$, $\psi = \pi$, $a = -47,2$, $b = 0,0236$.

В слое $0 \leq h \leq 2000$ м функция $\eta(z)$ растет с градиентом

$$\eta' = 0,01 \cos \varphi_0 - 0,0036$$

для азимутов, принадлежащих интервалу $-68^\circ 54' < \varphi_0 < 68^\circ 54'$. На высоте $h' = 2000$ м функция $\eta(z)$ имеет разрыв со скачком $\eta_2 - \eta_1 = -20 \cos \varphi_0$. В следующем слое $2000 \text{ м} \leq h \leq 4000$ м $\eta(z)$ будет убывать для $\cos \varphi_0 > 0$ и наоборот—расти с градиентом $\eta' = 0,0236 \cos \varphi_0 - 0,0036$ для азимутов интервала $-81^\circ 13' 33'' < \pi - \varphi_0 < 81^\circ 13' 33''$. Вне последнего интервала $\eta(z)$ убывает.

При таком состоянии атмосферы возникнут зоны слышимости с осью симметрии, совпадающей с направлением скорости ветра. Опираясь на критерий (159) возврата лучей полного внутреннего отражения на высотах пер-

вого слоя, легко видеть, что зона слышимости является сектором с прямолинейными границами, составляющими с осью симметрии угол $68^\circ 54'$ и внешней криволинейной границей $\Gamma_{h'}$, образованной предельными лучами первого слоя, проникающими до высоты $h' = 2000$ м. Помимо этой зоны возникнет вторичная зона в отрицательном направлении оси ξ , оси симметрии зоны, — от лучей, зондирующих высоты $h \geq h_2$, в виде сектора, ограниченного боковыми прямолинейными границами, составляющими с осью симметрии угол $81^\circ 13' 33''$, и внутренней криволинейной границей, образованной лучами, проникающими на высоты

$$h_2 = h' + \frac{\eta_0 - \eta_2}{\eta'(h_2)} = 2000 \text{ м} + \frac{7,2}{0,0236 \cos \varphi_0 - 0,0036} \text{ м}$$

для углов φ_0 , отсчитываемых от отрицательного направления оси ξ и принадлежащих интервалу $-81^\circ 13' 33'' \leq \varphi_0 \leq 81^\circ 13' 33''$.

Слой $h_2 - h'$ вовсе не отражает лучей и обуславливает появление зоны молчания. Расположение линий Γ_{η_0} , Γ_{η_2} , $\Gamma_{h'}$, образованных лучами 2-го типа, определится формулами (161) при соответственно выбранных значениях параметров и условиями заданного состояния в двух слоях атмосферы (фиг. 24). Зона слышимости, образуемая отраженными лучами, на фиг. 24 не показана.

§ 18

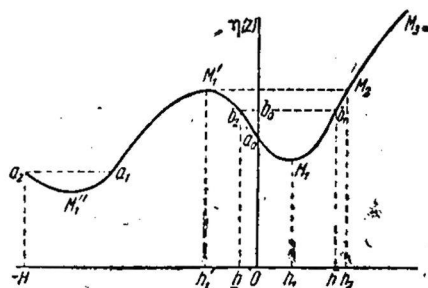
В главе второй изучались звуковые лучи и образованные ими зоны слышимости от точечного источника, находящегося на земной поверхности. Представляет большой интерес рассмотреть конгруэнцию лучей и соответствующие зоны слышимости от точечного источника, помещенного над земной поверхностью на заданной высоте H . Эта задача разбиралась Хиллом и Мильном [63] в частных предположениях состояния атмосферы.

Оставаясь в тех же основных допущениях изучаемой звукометрической задачи, что состояние атмосферы зависит от высоты, рассмотрим сначала звуковые лучи в атмосфере, свободной от каких-либо поверхностей раздела, нарушающих непрерывное распределение по высоте функции скорости $c(z)$ и составляющих ветра. Очевидно оценки влияния вертикальной составляющей $w(z)$ ветра на ход звукового луча, приведенные в § 10, остаются в силе, а потому допустим, что в атмосфере господствуют горизонтальные, параллельные земной поверхности воздушные токи, характеризуемые составляющими $u(z)$, $v(z)$. Ясно, что общие интегралы звукового луча и времени его пробега (38) остаются в силе. Выбирая начало координат в центре источника на высоте H и направляя ось z по вертикали вверх, получим формально те же уравнения звуковых лучей и времени их пробега, что и раньше, но с иной областью значений начальных наклонов θ_0 , а именно: $-\frac{\pi}{2} \leq \theta_0 \leq \frac{\pi}{2}$, ибо в изучаемом случае источник посылает лучи во всех направлениях.

Чтобы изучить траектории звуковых лучей и условия их падения на земную поверхность, обратимся вновь к функции „состояния“

$$\eta(z) = c(z) + u(z) \cos \varphi_0 + v(z) \sin \varphi_0,$$

заданной для интервала $-H \leq z \leq h_{\max}$ (фиг. 25), где $h_{\max}$ — верхняя граница высоты слоев атмосферы, зондируемых звуковыми лучами. Разобьем интервал



Фиг. 25

изменения z на два — положительный и отрицательный — и рассмотрим совокупность лучей, зондирующих положительные высоты, и совокупность лучей, проникающих в слои, лежащие ниже источника. Эти две совокупности лучей в соседстве с источником имеют соответственно положительные или отрицательные начальные наклонения θ_0 . Для первой совокупности звуковых лучей, выходящих из источника с наклонениями $\theta_0 \geq 0$, их ход, классификация и свойства остаются теми же, как если бы плоскость наблюдения была поднята на высоту H источника. Следовательно из конгруэнции лучей $\theta_0 \geq 0$ следует выделить лучи 1-го типа, которые не вернутся ни на уровень источника, ни на земную поверхность. Прочие лучи конгруэнции $\theta_0 \geq 0$ — лучи 2-го типа — претерпевают полное внутреннее отражение на высотах $\bar{h}$, для которых выполняется условие (107), и возвращаются на плоскость уровня источника с координатами и временем пробега, определяемыми выражениями (104), (105), (109). Возвращаясь на плоскость источника под углом $\theta_0 \leq 0$, равным по величине, в силу симметрии восходящей и нисходящей ветвей, начальному наклонению, такой луч продолжает далее свой путь в слоях, лежащих ниже источника. Дальнейший ход такого луча конгруэнтен лучу, вышедшему из источника с отрицательным наклонением, по величине равным положительному значению θ_0 луча 2-го типа.

Таким образом, в одном и том же азимуте φ_0 каждому значению

$$m_0 = \frac{c_0}{\cos \theta_0} + U_0$$

соответствуют два луча с положительным и отрицательным наклонением θ_0 . Уравнения луча с начальным отрицательным θ_0 и время его пробега можно получить из общего интеграла (38), полагая

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = 0, \quad t_0 = 0, \quad w = 0$$

и принимая отрицательное определение для $\sin \theta$ из уравнения (37)

$$\sin \theta = - \frac{\sqrt{(m_0 - U)^2 - c^2}}{m_0 - U}.$$

В системе координат (x, y, z) эти уравнения, напишутся в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} x &= - \int_0^z \frac{c^2 \cos \varphi_0 + u(m_0 - U)}{c \sqrt{(m_0 - U)^2 - c^2}} dz, \\ y &= - \int_0^z \frac{c^2 \sin \varphi_0 + v(m_0 - U)}{c \sqrt{(m_0 - U)^2 - c^2}} dz, \end{aligned} \right\} \quad (194)$$

$$t = - \int_0^z \frac{m_0 - U}{c \sqrt{(m_0 - U)^2 - c^2}} dz. \quad (195)$$

Наконец, в системе координат (X, Y, z) уравнения луча примут вид

$$\left. \begin{aligned} X &= - \int_0^z \frac{c^2 + U(m_0 - U)}{c \sqrt{(m_0 - U)^2 - c^2}} dz, \\ Y &= - \int_0^z \frac{V(m_0 - U)}{c \sqrt{(m_0 - U)^2 - c^2}} dz. \end{aligned} \right\} \quad (196)$$

В уравнениях (194), (195) и (196) предполагается $z < 0$. Допустим, что в интервале $H < z < 0$ не имеется корня уравнения

$$m_0(\theta_0, \varphi_0) = \eta(z, \varphi_0) = c(z) + u(z) \cos \varphi_0 + v(z) \sin \varphi_0, \quad (197)$$

т. е. отсутствует критическая точка подинтегральных выражений (194), (195) и (196). Составляя производные $\frac{dX}{dz}$, $\frac{dY}{dz}$ и исследуя их аналогично § 8, можно установить интервал начальных наклонов $-\frac{\pi}{2} < \theta_0^* \leq \theta_0 \leq 0$, для которого $\frac{dX}{dz} < 0$, т. е. растет с глубиной проникновения луча в слои под источником. Знак $\frac{dY}{dz} = V \frac{dt}{dz}$ зависит от V , т. е. от распределения скорости ветра, и очевидно $\frac{dt}{dz} < 0$. В этом случае нисходящий луч 1-го типа достигнет земной поверхности при $z = -H$. Координаты точки пересечения луча с земной поверхностью и время пробега оценятся выражениями

$$\left. \begin{aligned} \xi_0 &= \int_0^H \frac{c^2 \cos \varphi_0 + u(m_0 - U)}{c \sqrt{(m_0 - U)^2 - c^2}} dz, \\ \eta_0 &= \int_0^H \frac{c^2 \sin \varphi_0 + v(m_0 - U)}{c \sqrt{(m_0 - U)^2 - c^2}} dz, \end{aligned} \right\} \quad (198)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\xi}_0 &= \int_0^H \frac{c^2 + U(m_0 - U)}{c \sqrt{(m_0 - U)^2 - c^2}} dz, \\ H_0 &= \int_0^H \frac{V(m_0 - U)}{c \sqrt{(m_0 - U)^2 - c^2}} dz, \end{aligned} \right\} \quad (199)$$

$$\tau_0 = \int_0^H \frac{m_0 - U}{c \sqrt{(m_0 - U)^2 - c^2}} dz, \quad (200)$$

где интервал интеграции простирается от высоты источника до земной поверхности, и $m_0 \geq \eta(0)$.

Допустим, что в интервале $-H < z < 0$ лежит простой корень уравнения (197), т. е. что прямая $b_2 b_0 b_1$ (фиг. 25), лежащая на уровне $Ob_0 = m_0$, пересекает кривую $\eta(z)$ в точке b_2 с абсциссой $h < 0$. Рассуждением, аналогичным § 9 для лучей 2-го типа, можно установить, что соответствующий нисходящий луч 2-го типа претерпит на высоте h полное внутреннее отражение и затем, описав симметричную восходящую ветвь, вернется на уровень источника, следовательно луч такого наклона не может достигнуть земной поверхности. Наконец, если прямая уровня m_0 коснется кривой $\eta(z)$, то соответствующий луч будет асимптотически сверху приближаться к плоскости $z = h_1$, не достигая земной поверхности.

Соединяя сказанное о лучах, выходящих из источника с положительными и отрицательными наклонами, можем разбить на два класса конгруэнцию лучей, выходящих из источника во всех направлениях: I-й класс лучей, не достигающих земной поверхности, и II-й класс лучей, ее достигающих.

I-й класс состоит из лучей таких азимутов и наклонов, для которых: 1) отсутствует корень уравнения (197) в положительной области z — восходящие лучи 1-го типа или 2) наоборот, имеется простой корень в отрицательном интервале $-H < z \leq 0$ независимо от наличия корня в положительной области z для того же значения модуля начального наклона, т. е. для

того же значения m_0 , —нисходящие лучи 2-го типа. В этом втором случае нисходящий луч, претерпев полное внутреннее отражение на высоте $\bar{h}$ ниже источника, вернется на уровень источника и затем будет продолжать подыматься, как восходящий луч 1-го типа, если для выбранного наклонения отсутствует корень в положительной области z . Если же уравнение (197) имеет по крайней мере два простых корня в отрицательной и положительной области z (фиг. 25, точки b_2 и b_1), то звуковой луч будет испытывать полное внутреннее отражение последовательно на высотах $\bar{h}$ и $\underline{h}$, т. е. колебаться между плоскостями этих слоев, не выходя за их пределы. К этому же классу следует отнести предельные лучи 3-го типа, асимптотически стремящиеся снизу или сверху к соответствующим слоям. Последнее имеет место при наличии кратных корней уравнения (197).

II-й класс лучей, достигающих земной поверхности, состоит: 1) из нисходящих лучей 1-го типа, т. е. лучей таких наклонений и азимутов, для которых отсутствуют корни уравнения (197) в интервале $-H \leq z \leq 0$, за исключением возможного корня $z = -H$, и 2) из восходящих лучей 2-го типа, продолжающих нисходящую ветвь до земной поверхности, т. е. лучей, для которых имеется корень в положительной области z и отсутствует корень для $z < 0$. Следовательно, если прямая $b_2 b_0 b_1$ лежит выше ограниченной сверху кривой $\eta(z)$, то луч достигает земной поверхности, выходя из источника с отрицательным наклонением; если же прямая $b_0 b_1$ пересекает кривую $\eta(z)$ в точке с положительной абсциссой, но не пересекает в отрицательной области, то помимо луча с отрицательным наклонением достигает земной поверхности также луч положительного начального наклонения, сначала подымающийся до высоты, на которой испытывает полное внутреннее отражение, затем по симметричному падению на уровень источника продолжая нисходящую ветвь до земной поверхности. Координаты возврата такого луча и время его пробега до земной поверхности оценятся следующими выражениями:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= 2 \int_0^h \frac{c^2 \cos \varphi_0 + u(m_0 - U)}{c \sqrt{(m_0 - U)^2 - c^2}} dz + \xi_0, \\ \eta &= 2 \int_0^h \frac{c^2 \sin \varphi_0 + v(m_0 - U)}{c \sqrt{(m_0 - U)^2 - c^2}} dz + \eta_0, \end{aligned} \right\} \quad (201)$$

$$\left. \begin{aligned} \Xi &= 2 \int_0^h \frac{c^2 + U(m_0 - U)}{c \sqrt{(m_0 - U)^2 - c^2}} dz + \Xi_0, \\ H &= 2 \int_0^h \frac{V(m_0 - U)}{c \sqrt{(m_0 - U)^2 - c^2}} dz + H_0, \end{aligned} \right\} \quad (202)$$

$$\tau = 2 \int_0^h \frac{m_0 - U}{c \sqrt{(m_0 - U)^2 - c^2}} dz + \tau_0, \quad (203)$$

где $\xi_0, \eta_0, \Xi_0, H_0, \tau_0$ определяются из (198), (199) и (200); $m_0 = \eta(h) \geq \eta(0)$ — значения функции $\eta(z)$ на высоте источника.

Таким образом, если источник находится на высоте, для которой значение абсолютной скорости $\eta(0)$ в выбранном азимуте φ_0 изобразится точкой, лежащей на участках $a_1 M_1'$ или $M_2 M_3$ (фиг. 25) восходящей ветви кривой $\eta(z)$, то лучи любого отрицательного наклонения достигают земной поверхности; из лучей же положительных наклонений земной поверхности достигают лучи

произвольного наклона, не превосходящего верхнюю границу для лучей 2-го типа. Если на высоте положения источника значение $\eta(0)$ изобразится точкой, лежащей на участках $a_2M_1'a_1$ или $M_1'M_1M_2$, то лучи наклонов, близких к $\theta_0=0$, вовсе не достигнут земной поверхности, и лишь при начальных наклонах, для которых значение $m_0=\eta(h)$ больше ординаты уровня соответственно прямых a_2a_1 и $M_1'M_2$, лучи упадут на плоскость наблюдения.

Уравнения (198) и (201) являются формулами точечного преобразования области $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta_0 \leq \frac{\pi}{2}$ и определяют зону слышимости в плоскости наблюдения. Нанеся в этой области известную сеть изолиний, рассмотрим их расположение. Сравнение уравнений (198), (199) и (200) координат падения нисходящих лучей 1-го типа и времени их падения с аналогичными уравнениями (180), (181) и (182) для отраженных лучей непосредственно обнаруживает подобие зоны слышимости, образованной отраженными лучами от границы раздела состояний атмосферы, с зоной от лучей 1-го типа, выходящих из источника над земной поверхностью. Последняя зона заполняет область в смежности с вертикалью источника. Она простирается неограниченно, если состояние атмосферы в изучаемых азимутах изображается точками, лежащими на участке $M_1'M_1M_2$, ибо для наклона, соответствующего уровню точки M_2 , прямая $M_1'M_2$ касается кривой $\eta(z)$, а следовательно звуковой луч этого наклона асимптотически приближается к земной поверхности [интегралы (198), (199) и (200) расходятся]. Однако могут возникнуть ограниченные зоны, если, например, точка M_1' окажется угловой точкой с угловым коэффициентом, отличным от нуля, или если изображающая точка состояния атмосферы на высоте источника окажется на участках a_1M_1' или M_2M_3 и т. д.

В последнем случае границей зоны оказывается геометрическое место падения лучей 1-го типа, выходящих из источника параллельно земной поверхности. Конгруэнция рассматриваемых лучей не допускает образования действительной поверхности фокусов. Расположение изолиний подобно расположению в зоне слышимости, образованной лучами, отраженными от плоской поверхности раздела (§ 17).

Помимо зоны, образованной конгруэнцией лучей, выходящих из источника с отрицательными наклонами, возможно, как это было выяснено, образование другой зоны лучами положительных наклонов, зондирующими слои атмосферы, лежащие выше источника, и затем ниспадающими на земную поверхность. Эти лучи, как естественно ожидать, обладают свойствами, аналогичными лучам 2-го типа. Конгруэнция таких лучей может образовать многополостную поверхность фокусов, аналогичную каустической поверхности. Семейство проекций лучей одного азимута на соответствующую азимутальную плоскость может образовать огибающую. Появление фокуса на луче и характеристической точки на проекции луча возможно лишь на ниспадающей ветви луча выше или ниже источника.

Критерии образования фокуса, а также характеристической точки могут быть получены подобно § 12. Для этого нужно составить из координат (201) ξ , η функциональный определитель

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(\theta_0, \varphi_0)} = m_0 \frac{\partial m_0}{\partial \theta_0} E_1, \quad (204)$$

где

$$\begin{aligned} E_1 &= (2|\bar{f}_2 + f_2|^2 - (2|\bar{f}_1 + f_1|)(2|\bar{f}_3 + 2|\bar{f}_4 + f_3 + f_4| = \\ &= (2|\bar{f}_1 + f_1|) \left(\frac{2E_0}{|\bar{f}_1|} + \frac{E}{f_1} \right) - \frac{2}{f_1|\bar{f}_1|} (f_1|\bar{f}_2 - f_2|\bar{f}_1)^2. \end{aligned} \quad (205)$$

Входящие в правую часть $E_0, \bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3, \bar{f}_4$ определяются из (124) и (120); аналогично E, f_1, f_2, f_3, f_4 определяются из (188) и (186), причем верхний предел интегралов (186) следует положить $h' = H$. Таблица производных от координат ξ, η (201), E, H (202) и времени τ (203) напишется подобно (117), (118) и (119) с заменой $2\bar{f}_1, 2\bar{f}_2, 2\bar{f}_3, 2\bar{f}_4$ в правых частях соответственно на $2\bar{f}_1 + f_1, 2\bar{f}_2 + f_2, 2\bar{f}_3 + f_3, 2\bar{f}_4 + f_4$.

Необходимым и достаточным условием образования фокуса на нисходящей ветви луча 2-го типа является неравенство

$$E_1(\theta_0, \varphi_0) \leq 0, \quad (206)$$

выполнение которого влечет за собой неравенство

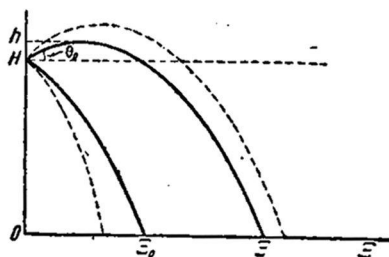
$$2\bar{f}_1 + f_1 > 0, \quad (207)$$

являющееся необходимым и достаточным признаком появления характеристической точки на проекции луча в своей азимутальной плоскости. Возможные комбинации знаков величин E_1 и $2\bar{f}_1 + f_1$ можно установить рассуждением, аналогичным приведенному в § 12, или же получить из (205) и таблицы знаков $E_0, \bar{f}_1$ (§ 12), помня, что $f_1 > 0$ и $E < 0$, как это установлено в § 17. Допускаемые знаки E_1 и $2\bar{f}_1 + f_1$ могут быть сведены в таблицу, тождественную с приведенной в § 12. Следовательно расположение линий семейств $\Gamma_{\varphi_0}, \Gamma_{\theta_0}, \Gamma_{\varphi}, \Gamma_{\theta}$, виды зон слышимости и их границы являются подобными приведенным в §§ 12, 13 и 14.

Соединяя сказанное о зонах слышимости, образуемых лучами, выходящими из источника с отрицательными и положительными наклонениями, которые для сокращения речи будем называть зоной отрицательных наклонений и соответственно зоной положительных наклонений, в зависимости от высоты источника и состояния атмосферы, мы получаем разнообразные случаи взаимного расположения этих зон. Сравнивая координаты падения и время пробега предельных лучей, с одной стороны, зоны отрицательных (199), (200) и, с другой стороны, зоны положительных наклонений (202), (203), найдем

$$\left. \begin{aligned} E - E_0 &= 2 \int_H^h \frac{c^2 + U(m_0 - U)}{c \sqrt{(m_0 - U)^2 - c^2}} dz, \\ H - H_0 &= 2 \int_H^h \frac{V(m_0 - U)}{c \sqrt{(m_0 - U)^2 - c^2}} dz, \end{aligned} \right\} \quad (208)$$

$$\tau - \tau_0 = 2 \int_H^h \frac{m_0 - U}{c \sqrt{(m_0 - U)^2 - c^2}} dz, \quad (209)$$



Фиг. 26

где высоты отсчитываются от земной поверхности, H — высота положения источника, $h \geq H$,

$$m_0 = \eta(h) = \frac{c(H)}{\cos \theta_0} + U(H). \quad (210)$$

Если предельным лучом положительных наклонений окажется луч $\theta_0 = 0$, для которого $h = H$, то изучаемые зоны непрерывно переходят одна в другую. Этот случай имеет место, если на высоте H состояние атмосферы

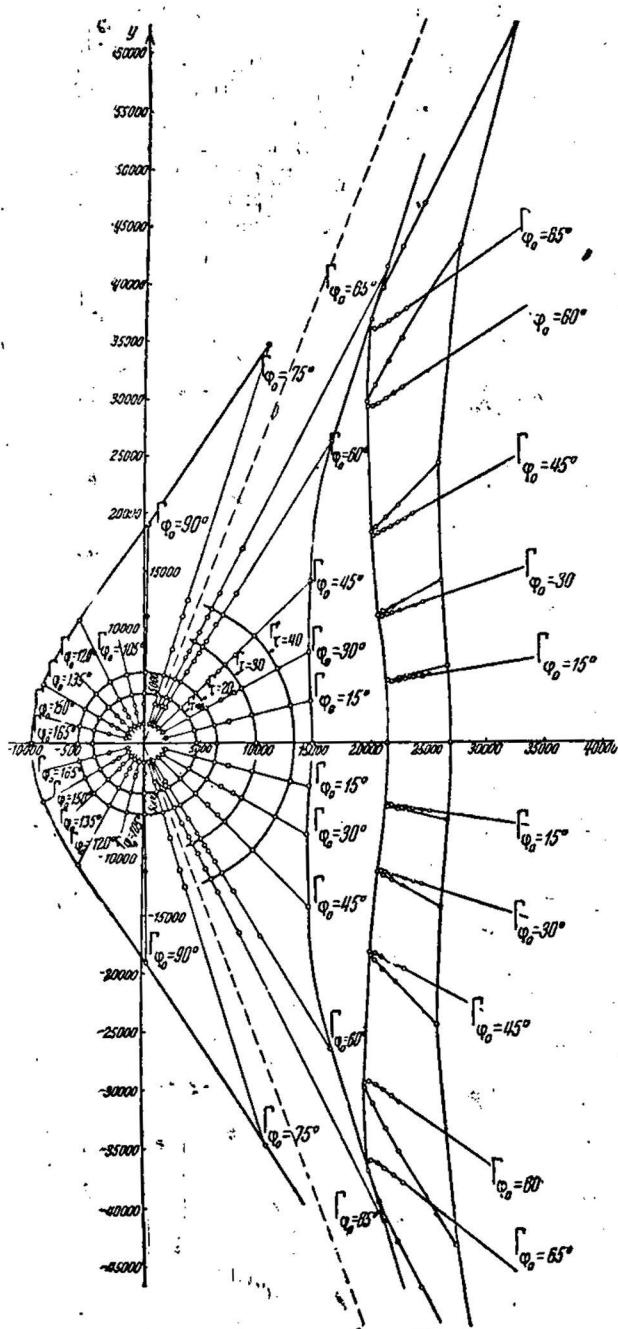
изображается точкой, лежащей на участках $a_1 M_1'$ или $M_2 M_3$ восходящей ветви кривой $\eta(z)$ (фиг. 25). Если же предельным лучом положительных, а следовательно и отрицательных наклонений окажется луч $\theta_0 > 0$ (фиг. 26), для которого высота зондирования $h > H$, то интересующие нас зоны для выбранных азимутов будут разделены зоной молчания с внутренней границей, образуемой предельными лучами отрицательных наклонений, и внешней границей, образуемой или предельными лучами положительных наклонений или, быть может, геометрическим местом фокусов этих лучей. Этот случай может возникнуть, например, если точка $\eta(H)$ находится на участке $a_2 M_1'' a_1$ (фиг. 25). В реальных условиях падения температуры с высотой и недостаточного компенсирования влияния скорости ветра в каком-либо азимуте этот случай может осуществиться. А следовательно, например, при движении самого источника на наблюдателя со скоростью, меньшей скорости звука, наблюдатель попеременно будет находиться в дальней зоне слышимости, образуемой лучами положительных наклонений, затем в зоне молчания и, наконец, вновь в зоне слышимости, образуемой лучами отрицательных наклонений. Расстояние падения предельного луча последней зоны от вертикали источника OE_0 (фиг. 26) может оказаться сравнительно небольшим в силу значительных предельных значений θ_0 краевых лучей. Так, например, уже при отсутствии ветра, за счет убывания температуры с высотой от 15°C до -60°C наклонение предельного луча может достигнуть $\theta_0 = -30^\circ$.

Наконец следует отметить возможный случай перекрытия двух зон, например, в случае, если обе зоны простираются неограниченно.

Мы предполагали в этом параграфе непрерывное изменение функции $\eta(z)$. Оценим теперь влияние разрыва $\eta(z)$ на образование зон от источника, находящегося над землей.

В § 17 было рассмотрено влияние разрыва в состоянии атмосферы на зоны слышимости, причем отмечено два различных случая, обуславливающих различный характер взаимного расположения первичной, вторичной зон и зоны отраженных лучей в зависимости от знака скачка разрыва функции $\eta(z)$. В настоящем параграфе было оценено специфическое влияние высоты положения источника, обуславливающее особенности взаимного расположения зон отрицательных и положительных азимутов, в зависимости от высоты источника и состояния атмосферы. При осуществлении высотного залегания источника и наличии в атмосфере плоской границы раздела различных ее состояний будем иметь соединение ранее рассмотренных особенностей, создающих весьма сложную картину взаимного расположения зон слышимости. Дадим здесь краткое описание особенностей сообразно рассмотренным в § 17 двум случаям разрыва.

1) Пусть на высоте h' имеется разрыв функции $\eta(z)$, причем $\eta_2 > \eta_1$ (фиг. 22). Допустим, что источник находится на высоте H . Положение источника на высоте H повлечет образование зоны отрицательных наклонений. Тогда, если $H < h'$, лучи положительных наклонений, зондирующие высоты $h < h'$, образуют первичную зону. Далее, на границе раздела возникнут лучи отраженные для значений параметра $m_0 \geq \eta_1$. Наконец, для $m_0 > \eta_2$ на границе раздела будут возникать преломленные лучи, зондирующие высоты $h > h'$ и образующие при их падении на земную поверхность вторичную зону слышимости. Таким образом, получим довольно сложное расположение зон слышимости, частично перекрывающихся и могущих образовать разрывы в виде зон молчания от наложения зон первичной, вторичной, зоны отраженных лучей и, наконец, зоны отрицательных наклонений. В предельном низу положении источника $H = h'$ имеем ту же картину наложения зон с той разницей, что зоны отраженных лучей и лучей отрицательных наклонений совпадут. Если же $H > h'$, то будем иметь соединение зоны лучей отрицательных наклонений и зоны положительных наклонений, примыкающей к первой вплотную



Фиг. 27

или, быть может, разделенной (в силу нахождения источника на высоте) областью молчания.

2) Пусть теперь мы имеем другой случай разрыва $\eta(z)$ на высоте h' , именно, пусть $\eta_2 < \eta_1$ (фиг. 23). Тогда, если $H < h'$, имеем соединение зон

отрицательных наклонений, зоны отраженных лучей, первичной зоны положительных наклонений от лучей, зондирующих высоты $H < h < h'$, и наконец, вторичной зоны положительных наклонений от лучей, преломленных на границе h' , отделенной от первичной зоны областью молчания вследствие того, что слои атмосферы на высотах $h' < h < h_2$ вовсе не отражают звуковые лучи.

То же получим для предельного снизу положения источника $H = h'$. Если высота источника $H > h_2 > h'$ (фиг. 23), зона отрицательных наклонений, непрерывно переходит в зону положительных наклонений, но если $h_2 > H \geq h'$, то зона отрицательных наклонений отделена от зоны положительных наклонений областью молчания в силу того, что лучи наклонений θ_0 , для которых $\eta_0^{(2)} \leq m_0(\theta_0) \leq m_0^{(1)}$ будут колебаться между слоями соответствующих высот, не достигая земной поверхности. Разрыв в зоне слышимости будет тем больше, чем больше значение θ_0 для предельных лучей внутренней и внешней границ зоны молчания, т. е. чем больше скачок разрыва $\eta_1 - \eta_2$.

Иллюстрируем последний случай следующим примером. Допустим, что с высотой температура падает так, что $c(h) = c_0 + ah$, причем примем $c_0 = 332$, $a = -0,0036$. Пусть скорость ветра, сохраняя всюду свое направление на высотах $0 \leq h \leq 2000$ м, линейно растет от нуля с градиентом $b = 0,01$, следовательно в обозначениях § 15 пусть $\psi = 0$, $a = 0$, $b = 0,01$.

Достигнув на высоте $h' = 2000$ м величины 20 м/сек, пусть скорость ветра разрывно падает до нуля, а затем на высотах $2000 \text{ м} \leq h \leq 4000$ м вновь линейно растет от нуля с иным градиентом, $b = 0,0236$, продолжая сохранять то же направление $\psi = 0$. Этим требованиям для второго слоя $2000 \text{ м} \leq h \leq 5000$ м удовлетворим, принимая $c_0 = 332$, $a = -0,0036$, $\psi = 0$, $b = -47,2$, $b = 0,0236$.

Допустим, что источник звуковой радиации находится на высоте h' с верхней стороны границы раздела, на которой $\eta(H) = \eta_2$. Рассмотрим конгруэнцию лучей, выходящих из таким образом расположенного источника. В секторе азимутов $-68^\circ 54' < \varphi_0 < 68^\circ 54'$ из лучей отрицательных наклонений достигают земной поверхности лучи наклонений по модулю большие θ_0 , удовлетворяющие уравнению $\frac{c(H)}{\cos \theta_0} = \eta_1$, или в числах

$$\cos \theta_0 = \frac{1}{1 + 0,06158 \cos \varphi_0}.$$

Следовательно для $\varphi_0 = 0$ возможные наклонения лежат в интервале $-90^\circ \leq \theta_0 < -19^\circ 36' 40''$. Вне этого сектора лишь лучи наклонений $-90^\circ \leq \theta_0 < -11^\circ 57'$ достигнут земной поверхности. Эти лучи образуют замкнутую зону отрицательных наклонений с границей, состоящей из места точек возврата предельных лучей наименьших по модулю θ_0 . Помимо этой зоны возникнет зона положительных наклонений лучей, зондирующих высоты

$$h \geq h' + \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta'(h)} = 2000 \text{ м} + \frac{20 \cos \varphi_0}{0,0236 \cos \varphi_0 - 0,0036} \text{ м}$$

для азимутов $-68^\circ 54' \leq \varphi_0 \leq 68^\circ 54'$.

Для положительных и отрицательных азимутов, по модулю принадлежащих интервалу $68^\circ 54' \leq \varphi_0 < 81^\circ 13' 33''$, лучи положительных наклонений, достигающие земной поверхности, зондируют высоты

$$h > h' + \frac{\eta_0 - \eta_2}{\eta'(h)} = 2000 \text{ м} + \frac{7,2}{0,0236 \cos \varphi_0 - 0,0036} \text{ м}.$$

Для прочих азимутов лучи положительных наклонений являются лучами 1-го типа, т. е. не достигают земной поверхности. Таким образом, лучи положительных наклонений образуют зону слышимости, лежащую в секторе $-81^{\circ}13'33'' < \varphi_0 < 81^{\circ}13'33''$. Внутренней границей этой зоны является геометрическое место возврата предельных лучей, зондирующих высоты $h > h'$. Эта зона отделена от зоны отрицательных наклонений зоной молчания. Расположение зон слышимости, зоны молчания и распределение изолиний изображено на фиг. 27.

Институт теоретической геофизики
Академии Наук СССР

Получено
14.XI.1939