

УДК 551.461

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПРОГНОЗ УРОВНЯ КАСПИЙСКОГО МОРЯ С ПОМОЩЬЮ НЕЛИНЕЙНОЙ И ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛЕЙ

© 2016 г. И.А. Кожевникова¹, В.И. Швейкина²

¹ *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

² *Институт водных проблем РАН, Москва, Россия*
e-mail: irina_kozhev@mail.ru, 9055424157@mail.ru

Поступила в редакцию 27.05.2015 г.

В статье рассмотрены линейная и нелинейная модели уровня Каспийского моря. Проанализированы возможности линейной модели (стационарной авторегрессии I порядка): при генерировании искомых траекторий путем случайного блуждания получается расходящийся процесс с возможностью прогноза не более чем на 1 шаг. Обоснована необходимость использования нелинейной модели, состоящей, например, из полиномиальной регрессии и периодических составляющих. Главное достоинство предлагаемой нелинейной модели — возможность научно обоснованно рассчитывать вероятности достижения заранее выбранного значения уровня. Приведены примеры расчета вероятности достижения выше- и нижележащих уровней по сравнению с уровнем 2010 год. Прогноз по среднемесячным значениям дан на 1 и 2 года.

Ключевые слова: полиномиальная регрессия, остаточная последовательность, полигармоническое отбеливание, периодограмма, вероятность достижения заданного уровня.

Введение. В статье авторов [4] исследована гипотеза хаотичности колебаний уровня Каспийского моря. Гипотеза по совокупности подтверждающих хаотических характеристик была принята. В этом случае, во-первых, прогноз уровня моря на длительный период (больше одного шага) невозможен, единственно правомочным становится вероятностный прогноз. И, во-вторых, уравнения, описывающие колебания уровня Каспийского моря, обязательно должны быть нелинейными. Следовательно, бесперспективными становятся любые попытки дать прогноз уровня моря, исходя из корреляционных или любых других линейных связей уровня с какими-либо гидродинамическими процессами. Однако в настоящее время официально признанные методики прогноза уровня Каспия основаны на линейных соотношениях [1]. Именно поэтому полученные прогнозы ежегодно пересчитываются и подправляются, т.к. линейные уравнения не могут дать переходы уровня с одного устойчивого состояния к другому, характерные для Каспийского моря. Впервые нелинейная модель колебаний уровня Каспия, генерирующая процесс с бимодальной плотностью вероятностей, была предложена в 1992 г. в Институте водных проблем В.И. Найденовым [6]. До него прогнозы, рассчи-

танные В.Е. Привальским [7] и С.В. Музылевым [5] были основаны на линейных соотношениях и давали прогнозы с ошибкой в 2 м. В статье приведен пример прогнозирования уровня Каспия с помощью авторегрессии первого порядка и показано, какой при этом моделируется процесс и каковы возможности прогноза.

Также в статье приведена нелинейная стохастическая модель и рассчитан вероятностный прогноз ожидаемых значений уровня. Для построения модели авторы использовали автономное дифференциальное уравнение, содержащее переменную “время” в неявном виде. Еще в середине прошлого века было показано, что зависимости, построенные на определенном временном интервале, имеют силу только на этом интервале и не годятся для экстраполяции за него, т.е. не могут быть использованы для прогноза.

В статье зависимости строятся на фазовой плоскости, координатами которой являются уровень и приращения уровня, для регрессионного облака точек, содержащего более 1300 значений. Используются среднемесячные значения уровня моря, что дало возможность определить и убрать периодические составляющие с частотами, соответ-

ствующими одному году, половине, одной третьей и четверти года. Освобожденная от детерминированных периодических составляющих остаточная последовательность имеет предельно малую дисперсию, что свидетельствует об адекватности модели исходным данным. Корреляционная функция такой остаточной последовательности имеет вид функции, практически равной нулю. Полученная модель позволила вычислить вероятность достижения заданного уровня. Такая вероятность вычисляется с помощью интеграла от плотности распределения остаточной последовательности. Используя метод математического моделирования, получены оценки математического ожидания вычисленных вероятностей.

Пример моделирования колебаний уровня Каспия линейной моделью. Для аппроксимации приращений колебаний уровня Каспийского моря рассмотрим линейную модель стационарной авторегрессии 1-го порядка $AR(1)$. Имеем статистические наблюдения — среднегодовые значения уровня Каспийского моря на в/п в г. Махачкала 1900–2010 гг. $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$, $n = 110$. Ряд приращений обозначим $(X_1, X_2, \dots, X_{n-1})$. Для построения модели потребовались оценки коэффициента корреляции (α) , приращений $(X_1, X_2, \dots, X_{n-1})$ и стандартного отклонения остаточной последовательности ε_t , их оценки соответственно равны 0.412 и 0.124. При этом $X_1 = \alpha X_0 + \varepsilon_1$, $X_2 = \alpha X_1 + \varepsilon_2$ или $X_2 = \alpha^2 X_0 + \alpha \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ и т.д. $X_t = \alpha^t X_0 + \alpha^{t-1} \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_t$, а ε_k , $k = 1, 2, \dots, t$, — последовательность независимых одинаково распределенных $N(0, 0.124^2)$ случайных величин. Для перехода от приращений к уровню воспользуемся случайным блужданием S_t за время t с $AR(1)$ и начальным значением $X_0 = Y_1 = -25.58$ м. абс.:

$$S_t = \sum_{k=0}^t X_k = X_0 \sum_{k=0}^t \alpha^k + \sum_{n=1}^t \varepsilon_n \frac{1 - \alpha^{t-(n-1)}}{1 - \alpha}.$$

Границы случайного блуждания вычисляются по формуле

$$Z(t) = \pm c \sqrt{\frac{D\varepsilon_1}{(1-\alpha)^2} \left(t - \frac{2(1-\alpha^t)}{\alpha^{-1}-1} + \frac{1-\alpha^{2t}}{\alpha^{-2}-1} \right)} + X_0, \quad (1)$$

где $\frac{D\varepsilon_1}{(1-\alpha)^2} \left(t - \frac{2(1-\alpha^t)}{\alpha^{-1}-1} + \frac{1-\alpha^{2t}}{\alpha^{-2}-1} \right)$ — дисперсия случайного блуждания S_t в момент времени t , c — постоянный коэффициент, в рассматриваемом случае $c = 3$. Из формулы (1) следует, а на рис. 1 ясно видно, что дисперсия случайного блуждания постоянно возрастает и, следовательно, границы, вмещающие моделированные траектории, расши-

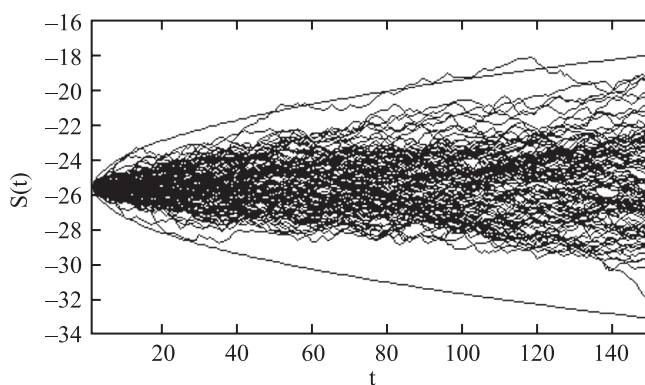


Рис. 1. Траектории, моделированные на основании случайного блуждания с $AR(1)$ для приращений Каспия, начальная точка всех траекторий -25.58 м абс.

ряются со временем. Моделированный процесс колебаний уровня на основании случайного блуждания является медленно расходящимся в бесконечность, в линейной модели $AR(1)$ есть только одно устойчивое состояние. Оптимальным в среднеквадратическом смысле прогнозом на 1 шаг, являющимся линейной оценкой величины X_{t+1} по значениям $X_1, X_2, \dots, X_t$ служит просто величина αX_t [10, 11]. При прогнозировании на k шагов вперед имеет место следующая формула [11]:

$$\tilde{X}^{(1)}(t+1) = \alpha^k X^{(1)}(t).$$

Так как $|\alpha| < 1$, это означает, что при $k > 1$, прогнозируется арифметическое среднее $AR(1)$, которое достигается уже за 3 года. Ход такой экстраполяции по среднегодовым статистическим данным приведен в табл. 1.

Если при этом и возникает кажущийся переход от одного уровня к другому, то такие траектории, как правило, достигают достаточно больших значений уровня, выходящих за пределы имеющегося интервала на основании наблюдаемых значений уровня, даже при моделировании последовательности хотя бы на 150 значений. Это наглядная иллюстрация к тому, что временные зависимости, построенные на определенном временном интервале, имеют силу только для интервала наблюдений и не могут быть использованы для экстраполяции на будущее время. Для прогноза могут быть использованы только зависимости, не содержащие в явном виде переменную “время”. Такая зависимость для вероятностного прогноза уровня Каспийского моря приводится далее.

Нелинейная стохастическая модель колебаний уровня Каспия. В качестве модели рассмотрено автономное дифференциально-разностное уравнение со случайной вынуждающей силой:

$$\Delta H = \phi(H) + \varepsilon(t),$$

Таблица 1. Экстраполяция на основании авторегрессии 1-го порядка, построенной для приращений колебаний уровня Каспийского моря

2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
-27.22	-27.24	-27.25	-27.25	-27.25	-27.25	-27.25	-27.25

где H – уровень моря, ΔH – приращения уровня моря, $\varphi(H)$ – некоторая функция уровня, задаваемая исследователем и называемая регрессией, $\varepsilon(t)$ – случайная вынуждающая сила. В качестве регрессии, связывающей приращения уровня моря ΔH с самим уровнем H , выбран алгебраический полином. Во избежание больших ошибок округления при возведении в степень, исходные данные $H(t)$, $t = 1, \dots, N$ нормированы по формуле:

$$Z(t) = \frac{2H(t) - H_{\max} - H_{\min}}{H_{\max} - H_{\min}}, \quad H_{\max} = \max_{1 \leq t \leq N} H(t),$$

$$H_{\min} = \min_{1 \leq t \leq N} H(t), \quad |Z(t)| \leq 1.$$

Искомая модель принимает вид:

$$Z(t+1) - Z(t) = \sum_{i=0}^k \alpha_i Z(t)^i + \gamma^{(k)}(t), \quad (2)$$

где k – порядок полинома, α_i – неизвестные коэффициенты полинома, которые оцениваются по статистическому ряду наблюдений, $\gamma^{(k)}(t)$ – остаточная последовательность, характеризующая действие случайной вынуждающей силы. Порядок полинома выбирается из условия минимума остаточной суммы квадратов. Кроме того, будем рассматривать только полиномы, задающие устойчивую динамическую систему, для которой производная полинома для наименьшего и наибольшего корней отрицательна. Такие полиномы имеют нечетный порядок и задают систему, которая начинается с устойчивого состояния и заканчивается устойчивым состоянием.

Так как остаточные суммы квадратов для регрессий вплоть до 11-го порядков (табл. 2) достигают минимума для $k = 9$, в дальнейшем в модели (2) рассматривается полином 9-го порядка, который имеет вид:

$$\Phi_9(Z) = 0.0006693 - 0.02563Z(t) -$$

$$- 0.05055Z(t)^2 + 0.3512Z(t)^3 + 0.2849Z(t)^4 -$$

$$1.3749Z(t)^5 - 0.4676Z(t)^6 + 2.0107Z(t)^7 -$$

$$- 0.2252Z(t)^8 - 1.0063Z(t)^9.$$

Полученная регрессия имеет 5 действительных корней, из них устойчивым состоянием равновесия соответствуют значения: $H_1 = -28.3169$, $H_3 = -27.1818$, $H_5 = -25.9764$; неустойчивым: $H_2 = -27.7553$ и $H_4 = -26.4060$ м абс.

Полигармоническое отбеливание. Вычитая из приращений нормированных среднемесячных колебаний уровня моря значения, удовлетворяющие уравнению автономной регрессии, получаем остаточную последовательность $\gamma^{(9)}(t)$. Оценка корреляционной функции для $\gamma^{(9)}(t)$ имеет размах, который превышает 0.4, временами достигая 0.45, и сохраняется на протяжении всей области определения корреляционной функции (рис. 2). Этот факт, несмотря на сравнительно малую остаточную сумму квадратов, свидетельствует о том, что в остаточной последовательности содержится неиспользованная существенная информация, которая отражает влияние окружающей среды.

Исследование периодограммы [8] остаточной последовательности показало наличие в ней периодических составляющих с различными частотами. Нелинейная регрессия удалила из исходных данных полиномиальный тренд, сохранив все периодические составляющие. Для выделения периодической составляющей из остаточной последовательности проводим “полигармоническое отбеливание”, при котором составляющая представляется в виде тригонометрического полинома [8]. Используя аддитивную схему, представим остаточную последовательность автономной нелинейной регрессии 9-го порядка $\gamma^{(9)}(t)$, в дальнейшем обозначаемую $\varepsilon(t)$, в виде суммы периодической составляющей и вновь полученной остаточной последовательности:

$$\varepsilon(t) = A_m(t) + \varepsilon_0(t),$$

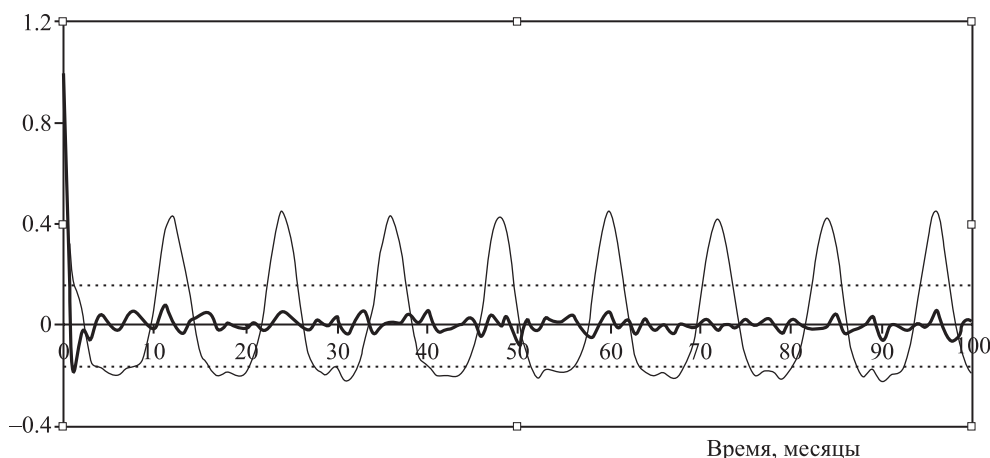
при этом предполагается, что периодическая составляющая состоит только из синусоидальных компонент

$$A_m(t) = A + \sum_{j=1}^m [A_j \cos(2\pi\nu_j t) + B_j \sin(2\pi\nu_j t)], \quad (3)$$

а ν_j – частота скрытой периодичности, $j = 1, 2, \dots, m$, – число периодических компонент временного ряда, которое априори неизвестно, причем $m \ll$ длины выборки, $\varepsilon(t)$ – исходная остаточная последовательность, полученная для нелинейной регрессии 9-го порядка, $\varepsilon_0(t)$ – остаточная последовательность, полученная после удаления скрытых периодичностей, A_j – коэффициенты при косинусах, B_j – коэффициенты при синусах, которые надо оценить методом наименьших квадратов.

Таблица 2. Остаточные суммы квадратов для полиномов нечетных степеней

Порядок полинома				
3	5	7	9	11
Значение остаточной суммы квадратов				
2.1818	2.1781	2.1763	2.1707	2.4680

**Рис. 2.** Корреляционные функции остаточной последовательности колебаний уровня Каспийского моря до (тонкая линия) и после (толстая линия) удаления периодических составляющих. Границы доверительного интервала — пунктир.

После удаления периодичностей с наибольшими пиками оставшиеся пики возрастают в силу нормировки периодограммы. Периодичности удалялись до тех пор, пока высоты всех оставшихся на периодограмме пиков не превышали 10. На основании полученных оценок частот были решены системы нормальных уравнений относительно неизвестных коэффициентов $A_0 - A_3$ и $B_1 - B_3$ (табл. 3). В таблице представлены коэффициенты для двух околгодовых частот и одной полугодовой.

Проверка гипотезы о независимости остаточной последовательности. Чтобы установить адекватность модели (2), надо проверить гипотезу о независимости остаточной последовательности, полученной в результате удаления перечисленных скрытых периодичностей.

Таблица 3. Оценки коэффициентов периодических составляющих и частот скрытых периодичностей в остаточной последовательности автономной нелинейной регрессии $\gamma^{(9)}(t)$

k	Частота (1/мес)	A_{0k}	A_k	B_k	Остаточная сумма квадратов	Период (месяц)
1	0.08345931	-0.000054156	-0.011634878	0.02874456	2.1707	11.9819
2	0.08396322	0.000001164	-0.001548783	0.00146960	1.5317	11.9100
3	0.16679264	0.000023283	-0.007797237	0.017793199	1.2822	5.9955

Для проверки гипотезы воспользуемся известным критерием автокорреляции, в котором в качестве статистики критерия используется линейная комбинация оценок коэффициентов корреляции [2, 12]:

$$r_k = \frac{\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{n-j} (x_i - \bar{x})(x_{i+j} - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n-1} (x_i - \bar{x})^2}.$$

Статистика критерия распределена асимптотически нормально. Для значений $n > 100$ справедливо следующее заключение: если

$$r_k^* = \frac{|r_k - Er_k|}{\sqrt{Dr_k}} > u_{\frac{1+\gamma}{2}}, \quad (4)$$

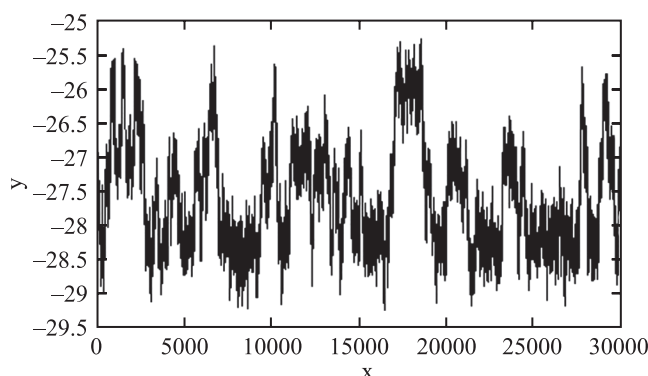


Рис. 3. Моделированная траектория по формуле (5).

гипотеза независимости последовательности отвергается. Оценки стандартного отклонения и математического ожидания, входящие в формулу (4), соответственно равны 0.0049 и 0 [2]. Проверяем гипотезу на уровне значимости 0.05, тогда $\gamma = 0.95$, и строим двусторонний доверительный интервал при $u_{1+\gamma/2} = 1.96$ для оценки корреляционной функции, показанной на рис. 2. Выбранный критерий показал, что гипотеза независимости справедлива на уровне значимости 0.05. В итоге, получена сто-

хастическая модель колебаний уровня Каспийского моря в виде суммы:

$$Z(t+1) = Z(t) + \Phi(Z(t)) + A_m(t) + \varepsilon_0(t), \quad (5)$$

где $Z(t)$ – уровень моря в нормированном масштабе в момент времени t , $\Phi(Z(t))$ – нелинейная регрессия 9-го порядка, $A_m(t)$ – суммарная периодичность, определенная формулой (3), $\varepsilon_0(t)$ – остаточная последовательность независимых одинаково распределенных гауссовских случайных величин. Моделированная траектория (рис. 3), полученная по этой модели на 30000 шагов, показывает, что процесс не выходит за пределы самого высокого и низкого наблюдаемых уровней моря. При этом уровень переходит от одного устойчивого состояния к другому.

Дисперсия остаточной последовательности, полученной после удаления полиномиальной регрессии и 3-х частот, соответствующих годовому и полугодовому периодам (табл. 3) равна 0.00098. Такая дисперсия является достаточно малой, чтобы можно было говорить об адекватности модели.

Расчет вероятности превышения заданного уровня. Вначале рассмотрим вероятность превышения заданного уровня a за 1 шаг (месяц)

$$P(Z(t+1) > a) = P(Z(t) + \Phi(Z(t)) + A_m(t) + \varepsilon_0(t) > a) = P(\varepsilon_0(t) > a - (Z(t) + \Phi(Z(t)) + A_m(t))).$$

Было установлено на основании критерия нормальности Агустино [2], что случайная величина $\varepsilon_0(t)$ имеет в каждый момент времени t распределение вероятностей $N\left(0, \frac{1.2822}{1309}\right)$ причем $\varepsilon_0(t)$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. Тогда вероятность превышения в момент времени $t + 1$ выражается следующим образом:

$$P(Z(t+1) > a) = \int_{a - (Z(t) + \Phi(Z(t)) + A_m(t))}^{\infty} p(x) dx, \quad (6)$$

где $p(x)$ – плотность распределения вероятностей случайной величины $\varepsilon_0(t)$.

Параметры плотности, коэффициенты полиномиальной регрессии и оценки коэффициентов для периодических компонент получены для нормированных значений, поэтому все вычисления проводятся в относительном масштабе.

Перейдем теперь к рассмотрению вероятности превышения заданного уровня за k шагов, считая по-прежнему, что один шаг это месяц. Вначале для наглядности рассмотрим $k = 2$. Имеем:

$$\begin{aligned} P(Z(t+2) > a) &= P(Z(t+1) + \Phi(Z(t+1)) + A_m(t+1) + \varepsilon_0(t+1) > a) = \\ &= P\left(Z(t) + \sum_{j=0}^1 \Phi(Z(t+j)) + \sum_{j=0}^1 A_m(t+j) + \sum_{j=0}^1 \varepsilon_0(t+j) > a\right) = \\ &= P\left(\sum_{j=0}^1 \varepsilon_0(t+j) > a - \left(Z(t) + \sum_{j=0}^1 (\Phi(Z(t+j)) + A_m(t+j))\right)\right), \end{aligned}$$

где $Z(t)$ – исходный уровень. По аналогии с формулой (6) легко записать формулу вероятности превышения за k шагов:

$$P(Z(t+k) > a) = P\left(\sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_0(t+j) > a - \left(Z(t) + \sum_{j=0}^{k-1} (\Phi(Z(t+j)) + A_m(t+j))\right)\right).$$

$$P(Z(t+k) > a) = \int_{a - \left(Z(t) + \sum_{j=0}^{k-1} (\Phi(Z(t+j)) + A_m(t+j))\right)}^{\infty} p_k(x) dx, \quad (7)$$

где $p_k(x)$ — плотность суммы $\sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_0(t+j)$ k независимых случайных величин, в рассматриваемом случае эти случайные величины имеют

нормальное распределение с одинаковыми параметрами.

Для используемой в расчетах остаточной последовательности выражение (7) преобразуется следующим образом:

$$P(Z(t+k) > a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k\sigma^2}} \int_{a - Z(t) - \sum_{j=0}^{k-1} (\Phi(Z(t+j)) + A_m(t+j))}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x - km)^2}{2k\sigma^2}\right) dx.$$

Сделав преобразование переменных , которое приводит нормальное распределение

к стандартному, получаем выражение для вычисления вероятности превышения заданного уровня a за k шагов:

$$\text{[redacted]} \quad (8)$$

Вероятность выхода за более низкий уровень за k шагов можно вычислить соответственно по формуле:

$$\text{[redacted]} \quad (9)$$

Для вычисления величин $Z(t+1)$, $Z(t+2)$ и т.д. используется следующее выражение

$$Z(t+j+1) = Z(t+j) + \Phi(Z(t+j)) + A_m(t+j) + \varepsilon_0(t+j), \quad (10)$$

где $\Phi(Z(t))$ — полиномиальная регрессия (2), предназначенная для удаления нестационарной части статистической последовательности наблюдений, $A_m(t)$ — гармонические составляющие (3), выявление которых возможно только для стационарной в широком смысле случайной последовательности, $\varepsilon_0(t)$ — остаточная последовательность, полученная после удаления указанных компонент из статистического ряда наблюдений. В табл. 4 приведен пример экстраполяции по формулам (8) и (9) с использованием (10).

Кроме расчета вероятности с использованием плотности распределения остаточной последовательности, вероятности пересечения того или иного заданного уровня можно получить при помощи метода математического моделирования. Для этого моделируем достаточное количество траекторий (10^2 – 10^6) и подсчитываем, сколько траекторий, из числа моделированных достигает заданный уровень. Такая таблица, например, для уровней Каспия приведена в работе [3]. Средние времена переходов из фиксированной точки x_0 к тому или иному устойчивому уровню на основании обратного уравнения Колмогорова были вычислены в работе [9]. Воспользуемся методом математического моделирования, чтобы рассчитать математические ожидания вычисленных вероятностей достижения заданного уровня

Таблица 4. Вероятностный прогноз колебаний уровня, построенный методом математического моделирования по 100-ам траекториям, исходный уровень – 27.06 (декабрь 2010 г) м абс

Уровень (м абс)	Оценка вероятности пересечения заданного уровня	Математическое ожидание оценки вероятности, вычисленной по формулам (8) и (9)	Дисперсия оценки вероятности, вычисленной по формулам (8) и (9)
–27.04	0.004	0.0025	0.0016
–27.13	0.958	0.882	0.046
–27.23	0.940	0.850	0.059
–27.33	0.878	0.772	0.098
– 27.42	0.824	0.700	0.122
–27.61	0.614	0.477	0.158
–27.81	0.418	0.325	0.157
–28.00	0.212	0.149	0.086
–28.19	0.082	0.057	0.037
–28.38	0.042	0.026	0.016
–28.48	0.004	0.0022	0.0012

и приведенных в табл. 4. Оценки математических ожиданий получены по совокупности из 100 моделированных траекторий и приведены в той же табл. 4.

Заключение. Основными результатами, полученными в статье, считаем следующие положения.

1. Проведенное в работе моделирование процесса колебаний уровня Каспийского моря с помощью авторегрессии 1-го порядка $AR(1)$ наглядно показывает, что в результате получается процесс, уходящий в бесконечность. Считаем, что любая линейная связь, используемая для экстраполяции значений уровня за наблюдаемый период времени, способна дать прогноз не более, чем на один шаг.
2. Подробно описана методика вывода стохастической модели, основой которой является полиномиальная регрессия, построенная в фазовом пространстве (приращение уровня – уровень) и не содержащая в явном виде переменную “время”. Такая зависимость имеет принципиальное значение. Попытка моделировать процесс колебаний уровня моря без нее, используя только периодические составляющие, приводит к генерированию процесса без переходов от одного устойчивого уровня к другому.
3. Совершенно новым в гидрологических исследованиях является методика выявления и удаления периодических составляющих в рядах наблюдений. При этом используются гармоники с определенными частотами, характерными для исходного ряда и выявленные с помощью периодограммы.

4. Применены современные методы статистических исследований для установления независимости остаточной последовательности. Оценка ее дисперсии дает основание считать полученную модель адекватной исходному ряду.

5. Большое внимание уделено выводу формулы расчета вероятностей пересечения заданного уровня. Вычислены вероятности выхода уровня за более низкий и более высокий уровни моря по сравнению с уровнем 2010 г. Наиболее вероятными значениями уровня являются более низкие уровни по сравнению с уровнем Каспийского моря в 2010 г.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абузьяров З.К. Методика фонового прогноза уровня Каспийского моря на 6 лет. <http://method.meteorf.ru>
2. Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. М.: Физматлит, 2006. 813 с.
3. Кожевникова И.А., Найденов В.И. Нелинейная стохастическая модель колебаний уровня Каспийского моря // Водные ресурсы. 1998. Т. 25. № 6. С. 661–670.
4. Кожевникова И.А., Швейкина В.И. Нелинейная динамика колебаний уровня Каспийского моря // Водные ресурсы. 2008. Т. 35. № 1. С. 313–320.
5. Музылев С.В. Теоретико-вероятностный анализ колебаний уровня замкнутого водоема // Водные ресурсы. 1980. № 5. С. 21–40.
6. Найденов В.И. Нелинейная модель колебаний уровня Каспийского моря // Математическое моделирование. 1992. Т. 4. № 6. С. 50–64.

7. Привальский В.Е. Колебания уровня бессточного водоема и их оптимальный вероятностный прогноз // Водные ресурсы. 1981. № 6. С. 5–21.
8. Тербиж В.Ю. Анализ временных рядов в астрофизике. М.: Наука, 1992.
9. Швейкина В.И., Кожевникова И.А. О вероятностях перехода уровня Каспия из одного состояния в другое на основе решения обратного уравнения Колмогорова // Водные ресурсы. 2008. Т. 35 № 1. С. 45–52.
10. Ширяев А.Н. Вероятность. М.: Наука, 1989. 638 с.
11. Яглом А.М. Введение в теорию стационарных случайных функций // УМН. 1952. Т. 7. Вып. 5(51). С. 3–168.
12. Knoke J.D. Testing for randomness against autocorrelated alternatives: the parametric case // *Biometrika*. 1975. Vol. 62. No. 3. P. 571–575.

Probability Forecast of the Caspian Sea Level Using Nonlinear and Linear Models

I.A. Kozhevnikova¹ and V.I. Shveikina²

¹*Moscow State University, Moscow, Russia*

²*Institute of Water Problems, Russian Academy of Science, Moscow, Russia*
e-mail: irina_kozhev@mail.ru, 9055424157@mail.ru

The article describes linear and nonlinear models of the Caspian Sea level. The possibilities of the linear model – a stationary autoregression of the first order – are analyzed: when generating the desired trajectories by random walks, it turns out divergent process with the ability of the forecast by no more than one step. The necessity of using nonlinear model consisting of, for example, polynomial regression and periodic components is substantiated. The main advantage of the proposed nonlinear model is the ability to scientifically calculate the probabilities of reaching a pre-selected level value. Examples of the calculation of the probability of reaching higher or lower levels compared with the 2010 level are given. The forecast for the average monthly values is given for one and two years.

Keywords: polynomial regression, residual sequence, polyharmonic whitening, periodogram, the probability of reaching a given level.

doi:10.15356/0373-2444-2016-6-59-66