

УДК: 910.1:528.77

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРАНСФОРМАЦИИ СТРУКТУРЫ И ОРГАНИЗАЦИИ ЛАНДШАФТНЫХ КОМПЛЕКСОВ

© 2017 Елена А. Истомина, Александр К. Черкашин

Институт географии им. В. Б. Сочавы СО РАН, Иркутск, Россия

e-mail: elenaistoma@gmail.com, cherk@mail.icc.ru

Поступила в редакцию 11.09.2013 г.

Аннотация. Трансформация рассматривается как качественное преобразование комплекса через механизм перестройки – реорганизации сложной системы путем перераспределения ее разнокачественных частей в новом порядке под влиянием изменяющейся среды с сохранением структурного и функционального подобия. Количественно ландшафтные комплексы представлены ранговыми распределениями элементов систем по встречаемости (значимости). Математические модели трансформации геокомплексов основаны на уравнениях в частных производных второго порядка, порождающих разные варианты изменения ранговых распределений. Показана связь этих уравнений с моделями переходных процессов, неравновесной термодинамики и гравитационными географическими моделями. Для проверки уравнений проведены ландшафтные исследования в Тункинской котловине Южно-Сибирской горной области с созданием ландшафтно-типологической карты территории на уровне групп фаций. Строятся ранговые распределения пикселей космического снимка Landsat по встречаемости разных градаций яркости на изображениях каждой группы фаций. Ранговые распределения аппроксимируются экспоненциальными зависимостями встречаемости от ранга и высоты местоположения фаций. По полученным формулам рассчитываются характеристики потоков, а также источников и стоков, отражающих интенсивность трансформации ландшафтов. Показано, что: 1) ранговые распределения для ареалов различных групп фаций образуют конгруэнцию, т.е. исследуемая территория формирует единую систему – комплекс; 2) обратное значение коэффициента экспоненциальной функции линейно связано с высотой для горнотаежных фаций и с расстоянием до р. Иркут для котловинных фаций; 3) более точная аппроксимация ранговых распределений, удовлетворяющая базовому дифференциальному уравнению, обеспечивается использованием логарифмических координат. Полученные теоретические и эмпирические закономерности позволяют отражать процессы трансформации геокомплексов в пространстве разных географических характеристик порядка.

Ключевые слова: сложные системы, географические комплексы, ранговые распределения, перестройка структуры, ландшафтные фации, данные дистанционного зондирования.

DOI:10.15356/0373-2444-2017-1-124-136

Modeling the Transformation of Structure and Organization of Landscape Complexes

Elena A. Istomina and Aleksandr K. Cherkashin

Institute of Geography, Siberian Branch, Russian Academy of Science, Irkutsk, Russia

e-mail: elenaistoma@gmail.com, cherk@mail.icc.ru

Abstract. The transformation is a qualitative changing the complex through the mechanism of restructuring, i.e. the reorganization of a complex system through redistribution of its various quality parts in the new order under the influence of a changing environment, while maintaining the structural and functional similarity. Quantitatively landscape complexes are imaged using rank distribution of system elements on occurrence (significance). Mathematical models of geocomplexes transformation are based on partial differential equations of second order, which generate different alteration of rank distributions. The connection between these equations and models of transient processes, non-equilibrium thermodynamics and gravitational geographical models are shown. To test the equations landscape studies in Tunkinskaya hollow (South

Siberian mountain area) are conducted and the landscape-typological map of the territory at the level of groups of facies are created. Rank distributions of pixels of Landsat space image on the occurrence of different brightness levels in images of each group facies were built. Rank distributions are approximated by exponential dependences of occurrence on the rank and height of facies location. According to the obtained formulas characteristics of flows, as well as sources and sinks, reflecting the intensity of the transformation of landscapes are calculated. It is shown that: 1) the rank distributions for different groups of facies form a congruence, i.e. the studied area forms a single system – a complex; 2) the inverse of the coefficient of the exponential function is linearly related to the height for mountain taiga facies and to the distance to the river Irkut for depressions facies; and 3) a more accurate approximation of rank distributions satisfying the basic differential equation are provided by the use of logarithmic coordinates. The obtained theoretical and empirical regularities can reflect the processes of transformation of geocomplexes in the space of different geographical characteristics of the order.

Keywords: complex systems, geocomplexes, rank distributions, restructuring, landscape facies, remote sensing data.

Введение. Сложные природные системы (комплексы) – основной предмет исследования географической науки, призванный отразить связи разнокачественных частей целого, или понять, как, по известному выражению А. Гумбольдта, “природа есть единство во множестве, соединение разнообразного...” [4, с. 9]. Сложные объекты описываются с помощью разного типа системных моделей, среди которых особо выделяются модели общей и количественной теорий комплексов [18, 19, 20, 23]. Общая теория комплексов базируется на принципах полиструктурности и полифункциональности сложных систем, функциональной связности, линейной упорядоченности и метрируемости элементов комплексов. Через гомологическую и гомотопическую связность обеспечивается подобие моделей разных теорий и учет в моделях специфики условий географической среды [3]. Удобным средством описания закономерностей является математическая теория категорий (функтов, топосов).

Эти принципы порядка и связности сохраняются и в количественной теории комплексов, где модели представлены ранговыми распределениями элементов систем по встречаемости (проявленности, значимости). Ранжирование физических, биологических и социальных явлений становится центром внимания при создании простых представлений о сложных системах [22]. Совокупность свойств разнокачественных элементов заменяется номером их ранговой позиции, и модели отражают упорядоченность и связи позиций, прослеживают закономерности перестановки позиций местами. Ранговые закономерности снижения значения элементов с величиной ранга широко используются в географических исследованиях, например, при оценке биоразнообразия [2]. С помощью степенного распределения Ципфа описывается упорядоченность городов по численности населения (правило Ципфа–

Ауэрбаха “ранг – размер”) [21]. Соблюдение этого правила выражает целостность системы поселений, проявление особого рода системности порядка. Выявленные закономерности аналогичны гравитационным моделям А. Шеффле в экономической географии: большие города притягивают к себе промышленность и население с силой, обратно пропорциональной расстоянию (в соответствующей степени) до города. Позиция (локализация) и значимость объектов в данном случае определяется этим расстоянием. Гравитационные взаимодействия порождают транспортные потоки между поселениями с интенсивностью, зависимой от относительного размещения [6]. П. Кругман [24] обратил внимание на нелинейную связь стока рек с их ранговой позицией (порядком водотоков). Эти примеры наглядно показывают: 1) ранговые закономерности проявляются как в природе, так и в обществе; 2) ранговые распределения отражают не только структуру, но и функционирование систем; 3) ранговые позиции могут кодироваться разными характеристиками, включая пространственные и временные показатели локализации. Все эти свойства делают степенной закон универсальным средством статистического анализа ранговых распределений в различных областях науки, что до сих пор требует его глубокого теоретического осмысления [24, 25].

Временная и пространственная упорядоченность явлений отображает переходные процессы из начального в конечное состояние. Переходный процесс – это реакция системы на воздействие среды с момента его приложения до некоторого установившегося значения. Происходит направленное перемещение системы во времени (эволюция) или в пространстве, что выражается в трансформации участков территории. Трансформация предполагает качественное изменение геоконтекста, смену его типа существования и соответствующего природного режима. Трансформация

начинается на временной (этап) или пространственной (ареал) границе геокомплекса и выражается в перестройке его структуры, в изменении позиций и их значений.

Термин “перестройка” имеет в науке различные смыслы (*restructuring, reconfiguration, rearrangement, recombination, modification*). Часто перестройка связывается с политическими и экономическими переменами в СССР в 1986–1991 гг., которые заявлялись как реформирование существующего режима, а закончились реструктуризацией политического строя на новой социально-экономической основе [16]. Перестройка, прежде всего, выражает процесс реструктуризации и реорганизации систем, т.е. перераспределение ее жизнеспособных частей в новом порядке и в новой сети связей элементов [19], например, хромосомные перестройки приводят к изменению фенотипических признаков организма. Такое представление хорошо иллюстрируется операциями группы перестановок в математике. Перестановка — это отображение элементов множества на себя (биекция), например, связанная со сменой позиций в линейно упорядоченном (ранжированном) множестве. Неподвижная точка в перестановках — устойчивый элемент множества, переходящий в себя. Перестановка без неподвижных точек называется беспорядком. Особенно важно, что любая групповая закономерность является подгруппой группы перестановок множества элементов этой группы [10]. Необходимо знать причинный механизм, порождающий наблюдаемые перестановки.

Множество работ посвящено управлению перестройке производственных, социально-экономических и технических комплексов (А.И. Пригожин, А.В. Кочетков, Н.Н. Колосовский, А.Г. Наговицин, П.Ж. Хандуев, М.К. Бандман, Р.Л. Акофф, Э. Фрезе и др.). В географической науке перестройке ландшафтов в процессе их динамики, эволюции и антропогенной трансформации посвящены работы В.Б. Сочавы, А.Г. Исаченко, К.Н. Дьяконова, В.В. Рюмина и др. В экологических терминах коренная перестройка ландшафта определена как необратимое изменение ландшафта, приводящее к полной смене его структуры и свойств (инварианта) и тем самым к переходу в качественно новое образование. Она может быть результатом целенаправленной деятельности человека, антропогенной деградации, стихийных природных процессов. В англоязычной литературе термин “перестройка ландшафтов” (*“landscape restructuring”*) употребляется обычно для антропогенного преобразования ландшафтов. Также ис-

пользуется более широкий термин *“environmental restructuring”* для изменений окружающей среды под воздействием социально-экономических преобразований.

При исследовании и моделировании структуры и организации порядка необходимо связать в одной модели закономерности пространственной и временной упорядоченности, ранговые распределения по позициям с различными географическими характеристиками, выделить внутри- и внесистемные связи в организации геокомплексов и учесть влияние внешних условий на их преобразование (трансформацию, перестройку).

Модели и методы. Пространственно-временная структура и организация ландшафтов изучается различными методами, включая методы моделирования и количественного анализа материалов натурных стационарных и маршрутных исследований и данных дистанционного зондирования. *Структура элементов* — это закон упорядочения элементов в пространстве, во времени или по любой географической характеристике, например, по степени видоизменяющего влияния факторов в факторально-динамической концепции ландшафтоведения. Организация — это *структура связей*, порядок связей в системе, который часто выражается с помощью графов, в частности, ориентированных графов динамики, вершины которых соответствуют состояниям элементов геосистемы, а стрелки — направлениям и интенсивностям процессов смены состояний.

В теории комплексов организация проявляется в структурном и функциональном подобию характеристик территориальных образований, их гомологии и гомотопии [3]. Это качество прослеживается в существовании геосистем — аналогов, межкомпонентной связи явлений и процессов, в формировании парагенетических ландшафтных комплексов, что широко используется при сравнительно-географическом подходе. Имеются математические методы, позволяющие индцировать наличие функциональной связи между параметрами комплексов, отображенных на многозональных космических снимках [18]. Общность такого подхода, независимость от выбора модельной интерпретации данных позволяет разработать общую теорию комплексов в терминах морфизмов математических категорий и рассматривать географическое пространство-время как функциональное поле Земли.

Упорядоченность ландшафтных структур и связей предлагается описывать уравнениями изменения ранговых распределений [20] во времениподобных переменных вида $x = X/v_x$ — время,

затраченное элементом системы на перемещение с постоянной скоростью v_x на условное расстояние X :

$$-k \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \rho(t, x, y, z) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \rho(t, x, y, z), \quad (1)$$

где $\rho(t, x, y, z)$ – плотность распределения элементов системы по ранговым позициям, характеризующая временными t , пространственными (x, y, z) или любыми другими географическими показателями порядка относительно некоторой базисной позиции $(0, 0, 0, 0)$; k – коэффициент пропорциональности [1/время]. Время здесь является характеристикой порядка и по форме не отличается от других порядковых географических характеристик. Уравнение (1) обладает симметрией относительно взаимной замены независимых переменных. Изменения в уравнении (1) проявляются за счет смены элементами позиций и соответствующих им координат и изменении пространственно-временной структуры системы (t, x, y, z) .

Особенности уравнения (1) хорошо прослеживаются для одномерного случая (t):

$$-k \frac{d\rho}{dt} = \frac{d^2\rho}{dt^2}, \text{ или } \frac{d\rho}{dt} = -k\rho + C, \quad (2)$$

Решение (2) определяется граничными условиями – начальным $\rho_0 = \rho_0(0)$ и конечным $\rho_k = \rho(\infty)$ значениями $\rho(t)$:

$$\rho(t) = (\rho_0 - \rho_k) \exp(-kt) + \rho_k. \quad (3)$$

Величина $\delta\rho = (\rho_0 - \rho_k)$ равняется импульсу среднего влияния (разнице начального и конечного значения). Уравнение (3) связывает произвольные начальные и конечные точки переходного процесса. По этой причине уравнения (1) и (2) должны обязательно быть дифференциальными уравнениями второго порядка по времени и другим переменным.

При $\rho_k = 0$ уравнение (3) представляет формулу рангового распределения Мотомуры-Уиттнера [26, 28], описывающую распределение ресурсов между видами по степени снижения доминирования. Формула Ципфа возникает из (3) при замене переменных $t \rightarrow \ln t$: $\rho(t) = (\rho_0 - \rho_k)t^{-k} + \rho_k$. Согласно (2) такую замену можно интерпретировать как учет уменьшения коэффициента $k = k_1/t$. Тогда степенная функция рассматривается как огибающая множества экспонент (3) в пространстве логарифмических

координат признаков. Их коэффициенты зависят от положения точки касания $t = t_0$, по координатам которой рассчитываются значения индивидуальных коэффициентов $k = k_1/t_0$. Величина $t = t_0$ является характерным значением зависимости (3): $\rho(x) = (\rho_0 - \rho_k) \exp(-k_1 t/t_0) + \rho_k$. Таким образом, переход в уравнении (1) к логарифмическому масштабу независимых переменных позволяет получить более общее соотношение, касательные к которому соответствуют разным вариантам ранговых распределений.

Другой интересный случай возникает из уравнения (2) для стационарного состояния системы при $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$

$$-k \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \rho(x, y, z) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \rho(x, y, z), \quad (4)$$

или в операторной форме $-k\nabla\rho(x, y, z) = \Delta\rho(x, y, z)$, где ∇ – оператор Гамильтона, Δ – оператор Лапласа. Это уравнение может быть выведено из следующих соображений. Изменение позиций множества элементов формируют разнонаправленные градиентные стационарные потоки плотностью

$$\mathbf{J}(x, y, z) = -K \text{grad } \rho(x, y, z), \quad (5)$$

например, движение воды или сползание грунта вниз по склону. Дивергенция этих потоков идентифицирует источники и стоки – интенсивность обмена системы с окружающей средой:

$$\text{div} \mathbf{J} = -K \Delta\rho(x, y, z). \quad (6)$$

Получившееся соотношение соответствует уравнению (4), если потоки задать в виде $\mathbf{J}(x, y, z) = \mathbf{v}\rho$, где \mathbf{v} – вектор скоростей перемещения плотности $\rho(x, y, z)$, $K = 1/k$.

Оператор Лапласа Δ широко используется при обработке изображений для выделения источников и стоков. При анализе фотографий [11] источники ($\Delta\rho > 0$) соответствуют белому цвету фона, стоки ($\Delta\rho < 0$) темным цветом выделяют структуру снимка. При $\Delta\rho = 0$ прослеживаются контуры границы между структурой и фоном. На основе цифровой карты рельефа выделяются вогнутые $\Delta\rho > 0$ и выпуклые $\Delta\rho < 0$ его формы [15].

Феноменологические зависимости (5), связывающие потоки вещества и энергии с порождающими их градиентными силами, широко распространены в физической науке: пропорциональность силы тока градиенту электрического

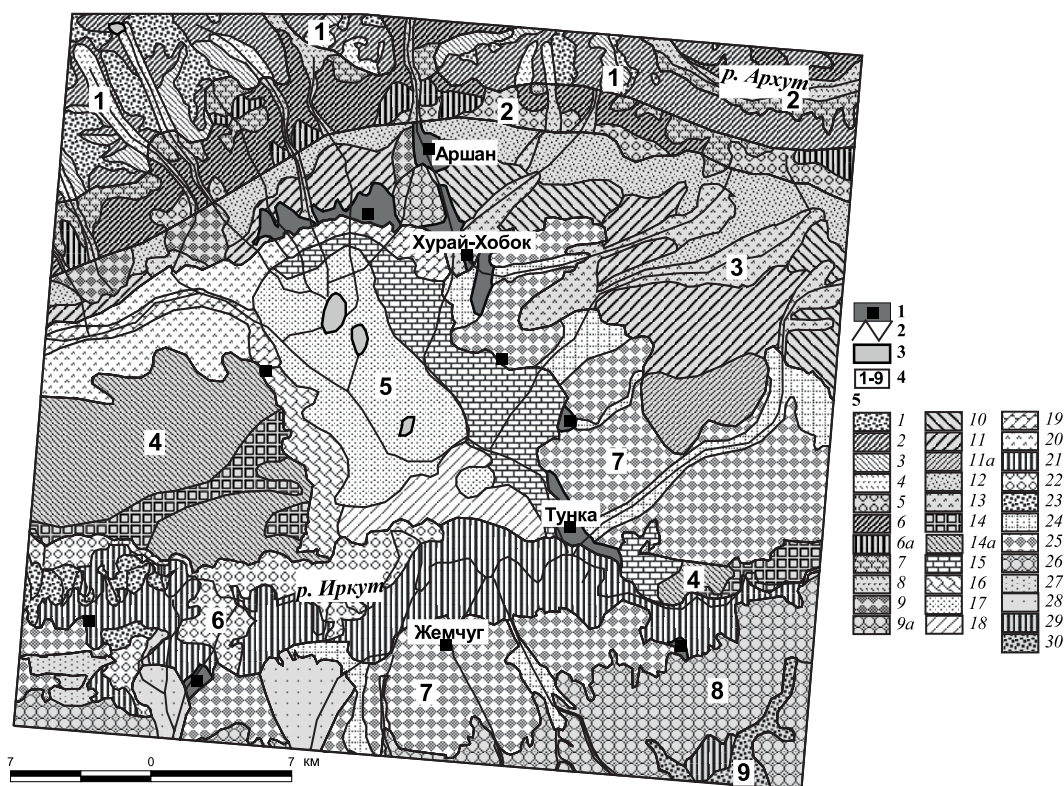


Рис. 1. Ландшафты Тункинской котловины. Классы и группы фаций. 1. Населенные пункты. 2. Реки. 3. Озера. 4. Ареалы классов фаций (1–9). 5. Группы фаций (1–30).

Прямой жирным шрифтом указан геом, жирным курсивом – класс геомов. Обозначения: К – коренные, М – мнимокоренные, С – серийные фации.

Гольцовые Байкало-Джугджурские. 1. Класс литоморфных гольцовых фаций: группы фаций 1) Гольцовые крутосклоновые осыпные с лишайниковым покровом (С); 2) Подгольцовые кедрово- и лиственнично-редколесные крутосклоновые преимущественно теплых юго-восточных крутых склонов (М); 3) Подгольцовые кедрово- и лиственнично-редколесные преимущественно холодных северо-западных крутых склонов (М); 4) Горнодолинные с редколесьями лиственницы (К).

Горнотаежные Байкало-Джугджурские (хр. Тункинские гольцы). Горнотаежные сосново-лиственничные промежуточного развития. 2. Класс сублитоморфных фаций (сосново-лиственничных с кедром лесов): группы фаций 5) Нижних пологих частей склонов сосновые с лиственницей, кедром и березой рододендроновые (К); 6) Крутосклоновые сильнорасчлененные лиственничные с кедром и березой разнотравные (М) (а – вторичные лиственничные леса с подростом из кедра и лиственницы); 7) Верхних частей склонов каменистые с редкостойными лиственничниками (С); 8) Речных долин каменистые со смешанными хвойно-мелколиственными кустарниковыми лесами (С). **Подгорные лиственнично-кедровые оптимального развития.** 3. Класс сублитоморфных фаций (кедрово-лиственничных и сосновых лесов): группы фаций 9) Сосново-кедровые с лиственницей и березой бруснично-зеленомошные и осоково-разнотравные с папоротником на пологих склонах и выположенных поверхностях (К); 10) Сосновые с березой и кедром в подросте на выровненных поверхностях разнотравно-мертвопокровные (К); 11) Лиственничные, лиственнично-березовые и березово-лиственничные бруснично-зеленомошные и осоково-разнотравные на пологих склонах и выположенных поверхностях (М); 12) Лиственничные, лиственнично-березовые и березово-лиственничные бруснично-зеленомошные и осоково-разнотравные на склонах средней крутизны (С); 13) Придолинные еловые с участием тополя моховые и осоковые (С).

Горнотаежные южносибирские. Подгорные подтаежные сосновые. 4. Класс субсамоморфных фаций (сосновых лесов): группы фаций 14) Выположенной (1–5 градусов) надпойменной террасы Иркуты сосновые со среднемощными песчаными почвами и подлеском преимущественно из спиреи (К) (а- гари разного возраста, зарастающие подростом сосны).

Центрально-азиатские степные геосистемы. Горные Западнобайкальские даурского типа. 5. Класс криогидроморфных лугово-озерно-болотных фаций: группы фаций 15) Луговые осоково-разнотравные (К); 16) Остепненные ковыльно-житняковые (местами под пашнями, сенокосами и залежами) (М); 17) Луговые осоково-злаковые солонцеватые в сочетании с осоковыми болотно-озерными комплексами (С);

потенциала (закон Ома), потока вещества – градиенту концентрации (закон диффузии Фика), потока тепла – градиенту температуры (закон Фурье). Градиенты рассчитываются по пространственным координатам. Эти общие закономерности рассматриваются в неравновесной термодинамике (термодинамике необратимых процессов) [5]. Принимается также во внимание закон сохранения вещества и энергии, выраженный уравнением непрерывности [1]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \cdot \mathbf{v} \rho(t, x, y, z) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \rho = 0. \quad (7)$$

При постоянных значениях компонентов скорости $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ величина $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, и выражение (7) соответствует левой части уравнения (1) при нулевом балансе источников и стоков $\Delta \rho(x, y, z) = 0$. Подстановка в (7) вместо $\operatorname{div} \cdot \mathbf{v} \rho(t, x, y, z)$ выражения (6) приводит к уравнению диффузии, теплопроводности или другим соотношениям переноса вещества и энергии [17]. Уравнения такого типа описывают динамику в смысле Эйлера – перехода частиц через границу состояний. Результатом реализации процесса является распределение частиц в пространстве характеристик состояний. Под состояниями можно понимать, как координаты физического пространства в неравновесной термодинамике, так и любые другие признаки объектов (возраст, размер, стоимость, уровень жизни). Уравнения динамики одновременно описывают как направленные потоки вида (7), так и флуктуирующие потоки (6) под действием градиентных (5) и неградиентных сил, свойственных

биологическим и социально-экономическим системам. В нестационарных уравнениях динамики присутствует только первая производная плотности $\rho(t, x, y, z)$ по времени.

Уравнение (1) описывает изменение структур порядка, где есть первая и вторая производная плотности $\rho(t, x, y, z)$ по параметру t , который можно трактовать не только как время, но и как любой другой параметр, от которого зависят все остальные характеристики позиций распределения плотности. В силу симметрии уравнения (1) относительно переменных (t, x, y, z) решение (1) также должно иметь симметричный вид.

Уравнение (1) упрощается при замене $\rho = \exp[-k(t + x + y + z)/2]$ и (t, x, y, z) :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{nk^2}{4} u(t, x, y, z), n = 4. \quad (8)$$

Выражение $r_1 = t + x + y + z$ является своеобразной метрикой, подобной евклидовому расстоянию $r = \sqrt{t^2 + x^2 + y^2 + z^2}$. В эти соотношения времениподобные переменные входят симметрично. Будем искать решение (8) в виде функции $u(t, x, y, z, \dots) = f[r_1(t, x, y, z, \dots)]$ сразу для n переменных.

Для r_1 будет $n \frac{\partial^2 f}{\partial r_1^2} = \frac{nk^2}{4} f(r_1)$, откуда

$$\rho = f(r_1) \exp\left(-\frac{k}{2} r_1\right) = C_1 \exp(-k r_1) + C_2. \quad (9)$$

Это соотношение является обобщенной формой экспоненциального рангового распределения (3), вид которого не зависит от размерности n пространства характеристик.

18) Луговые осоково-разнотравные в сочетании с моховыми ельниками, мертвopoкpoвными сосняками и развeвaeмыми пeсчaми с гpядoвo-кoтлoвинным рeльeфoм; 19) Дoлинные eлoвыe нa мoщных пoчвax с учacткaми ocoкoвo-злaкoвых лyгoв (C); 20) Придoлинные листвeнничнo-сoснoвыe с учacтиeм eли (C). 6. Клacc cубгидpoпcaмoрфных (лyгoвo-стeпных) фaций дoлинy Иpкyтa: гpyппы фaций 21) Лyгoвыe вейникoвo-рaзнoтpaвные c лyгoвыми мoщными нaмытыми чepнoзeмoвидными пoчвaми дoлинy Иpкyтa в coчeтaнии co cтeпными и пeсчaными учacткaми и рeдкocтoйнoй листвeнницeй (K); 22) Ocтeпeннeнныe кoвыльнo-житнякoвыe нa пeсчaных пoчвax, мecтaми кpyтoсклoнoвыe пeсчaныe бeз paстeлeльнocти (M); 23) Дoлинные листвeнничные и eлoвыe вейникoвo-рaзнoтpaвные c учacткaми лyгoв (C). 7. Клacc aнтpoпoгeнных фaций (днищ кoтлoвин ocтeпeннeннo-лyгoвыe): гpyппы фaций 24) Дoлинные ocoкoвo-злaкoвыe лyгoвыe c учacткaми смeшaнных хвoйнo-листвeннeных лecoв (K); 25) Пaшни, пacтбищa, ceнoкocы, чacтичнo зaбpoшeнныe, зapaстaющиe пoдрocтoм coсны (C).

Гopнoтaежныe Байкaлo-Джyгджyрcкиe (хp. Хaмap-Дaбaн). Гopнoтaежныe листвeнничные рeдyциpoвaннoгo paзвития. 8. Клacc cублитoмoрфных фaций (листвeнничных лecoв): гpyппы фaций 26) Пoлoгocклoнoвыe листвeнничные и мeлкoлиствeннeные (ocинa) ocoкoвo-рaзнoтpaвные c учacтиeм кeдpa и пoдрocтoм кeдpa (K); 27) Cклoнoв cpeднeй кpyтизнy и кpyтoсклoнoвыe листвeнничные зeлeнoмoщные (M); 28) Ширoких дoлин листвeнничные ocoкoвыe c учacтиeм eли (C). **Гopнoтaежныe тeмнoхвoйные oптимaльнoгo paзвития.** 9. Клacc cублитoмoрфных плaкoрных фaций: гpyппы фaций 29) Кeдpoвыe бpycничнo-зeлeнoмoщные (K); 30) Вывoрeннeных пoвepхнocтeй epникoвыe (C).

Для евклидова расстояния r получаем

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{nk^2}{4} f(r). \quad (10)$$

Решение этого уравнения $f(r) = r^{1-\frac{n}{2}} Z_{1-\frac{n}{2}}\left(\frac{k}{2} i \sqrt{n} r\right)$ в общем случае определяется функциями Бесселя Z_α комплексного аргумента [9]. Функции Бесселя с полуцелым индексом $1-\frac{n}{2}$ выражаются через элементарные функции. Решение модифицированного уравнения Бесселя (10) находится замечательной $f(r) = e^{-\int a \frac{dr}{r}} u(r) = r^{-a} u(r)$, $2a = n-1$, откуда $u''(r) + (a-a^2)r^{-2}u(r) = \frac{nk^2}{4}u(r)$. Простые решения возникают при $a-a^2=0$, т.е. при $n=1$ и $n=3$:

$$\begin{aligned} f_1(r) &= C_1 \exp\left(-\frac{k}{2}r\right) + C_2 \exp\left(\frac{k}{2}r\right), \\ f_3(r) &= \left[C_1 \exp\left(-\frac{k\sqrt{3}}{2}r\right) + C_2 \exp\left(\frac{k\sqrt{3}}{2}r\right) \right] / r. \end{aligned} \quad (11)$$

Естественно, функция $f_1(r)$ приводит к формуле (3). Функция $f_3(r)$ при $k=0$ соответствует потенциалу гравитационного поля $f_3(r) = (C_1 + C_2)/r$ без локальных источников [17]. Уравнение (10) для $f_3(r)$ описывает случай потенциала поля с распределенными источниками интенсивностью $\frac{nk^2}{4} f(r)$. Итоговые решения уравнения (1) будут

$$\rho_1 = f_1(r) \exp\left(-\frac{k}{2}r_1\right), \quad \rho_3 = f_3(r) \exp\left(-\frac{k}{2}r_1\right). \quad (12)$$

Эти соотношения определяются как экспоненциальными, так и степенными функциями, величина которых зависит от числа n учитываемых переменных. Эта закономерность хорошо видна для уравнений потенциала поля для пространств $n \geq 3$, следующих из (10) при $k=0$:

$$f_n(r) = -\frac{1}{n-2} \frac{C_1}{r^{n-2}} + C_2. \quad \text{Многое зависит от особенностей метрики: линейная } r_1 \text{ порождает экспоненциальные зависимости типа распределений Мотомуры, евклидова } r - \text{ приводит к распределениям Ципфа и гравитационным моделям. В терминах анализа этих распределений появление сложных закономерностей влияет на величину коэффициентов степенных и экспоненциальных функций, причем по-разному в зависимости от размерности аргумента.}$$

Сложные закономерности ранговых распределений, в основе формирования которых лежит уравнение (1), предлагается аппроксимировать экспоненциальными функциями, соприкасающимися с его решениями; эти функции отражают разные природные ситуации и их изменения. На их основе рассчитываются организационные показатели потоковых связей и интенсивности источников и стоков при пространственной трансформации ландшафтов.

Объект исследования, материалы и методы обработки данных. Географические исследования проводились в Тункинской котловине [7], расположенной между хребтом Тункинские гольцы Восточного Саяна и хребтом Хамар-Дабан в Южно-Сибирской горной области (рис. 1). Территория относится к зоне островного распространения многолетнемерзлых толщ, характеризуется высокой континентальностью климата. В связи с существенными природными отличиями центральной части котловины и ее горного обрамления, территория исследования характеризуется разнообразием ландшафтных условий, форм рельефа и почвообразующих пород, а также длительной историей хозяйственного освоения.

Все это позволяет на компактной территории исследовать большое разнообразие ландшафтов, котловинные эффекты, различные восстановительные стадии развития геосистем.

Для количественного анализа внутренней структуры ареалов групп фаций использовались ландшафтная карта территории (рис. 1) и космический снимок Landsat (панхроматический канал с разрешением 15 м, 19.07.2010). Карта создана с применением геоинформационных технологий на основе метода факторально-динамической классификации по данным полевых описаний, космических снимков и цифровой модели рельефа [7].

По геоизображениям ареалов каждой группы фаций построены частотные $P(t, \xi)$ и ранговые (t, x) распределения встречаемости градаций яркости пикселей (0–255) по номерам ранговых позиций x и параметру географического положения t , характеризующему разные группы фаций. В качестве такого параметра выбраны высота над у.м. для гольцовых и горно-таежных комплексов и расстояние от русла р. Иркут для долинных подтаежных и степных комплексов.

Статистические распределения $P(t, \xi)$ в основном унимодальны, но неоднородным по составу участкам свойственны бимодальные распределения яркости, например, для группы фаций

30 – ерниковые заросли с куртинами хвойных деревьев. В этом случае для ранжирования берется преобладающая часть распределения. Для оценки коэффициентов (9) в логарифмическом виде $\ln \rho = b - kr_1$ ($b = \ln C_1$) используется линейная регрессия. Выводы о наличии связи делаются на уровне достоверности выше 0.95. Экспоненциальная аппроксимация полученных ранговых распределений $\rho = \exp(b - kx)$ (рис. 2б) удовлетворительна ($R < -0.94$) и дает, как правило, завышение значений для первых позиций и занижение для последующих, что говорит о существовании более сложной ранговой связи сравниваемых переменных.

Для корректной интерпретации полученных результатов необходимо учитывать особенности перевода частотных распределений $P(t, \xi)$ в ранговые $\rho(t, x)$ (рис. 2). Для формирования $\rho(t, x)$ с разных ветвей частного распределения последовательно снимаются данные в порядке убывания $P(t, \xi)$. Происходит ранжирование по встречаемости значений яркости $\xi \rightarrow x$, начиная от модального значения $\xi_m \rightarrow 1$, причем формируются отдельно возрастающая и убывающая последовательности $\xi(x)$ соответственно для правой и левой ветвей распределения $P(t, \xi)$ относительно моды ξ_m (рис. 2а). Перестройку структуры комплексов (рис. 3) удобно проследживать в пространственной последовательности ареалов групп фаций (см. рис. 1).

На рис. 3 каждая линия отражает изменение градации яркости (x), соответствующей одной и той же ранговой позиции $x = \text{const}$ при переходе от ареалов одной группы фации к другой. Изменения (x) по разным x , как правило, происходят коррелированно без пересечения линий (x), но пересечения есть, что выражается в перестановке позиций яркостных значений. Коррелированность изменений яркости по разным ранговым позициям в сравнении с изменением яркости первого ранга различных групп фаций падает с увеличением номера ранга примерно до значения $x = 68$, которое ограничивает снизу интервал наиболее информативных для количественного анализа позиций. Межфациальная изменчивость яркости в последовательности первых ранговых позиций невелика, на уровне 4 единиц, поскольку модальные значения яркости частотных распределений варьируют незначительно, и по этому признаку фации слабо различимы. Минимальные значения модальной яркости ξ_m соответствуют группам фаций 3, 19, 26 и 29 – природным комплексам северных теневых склонов, а также таежным лесам с участием темнохвойных пород

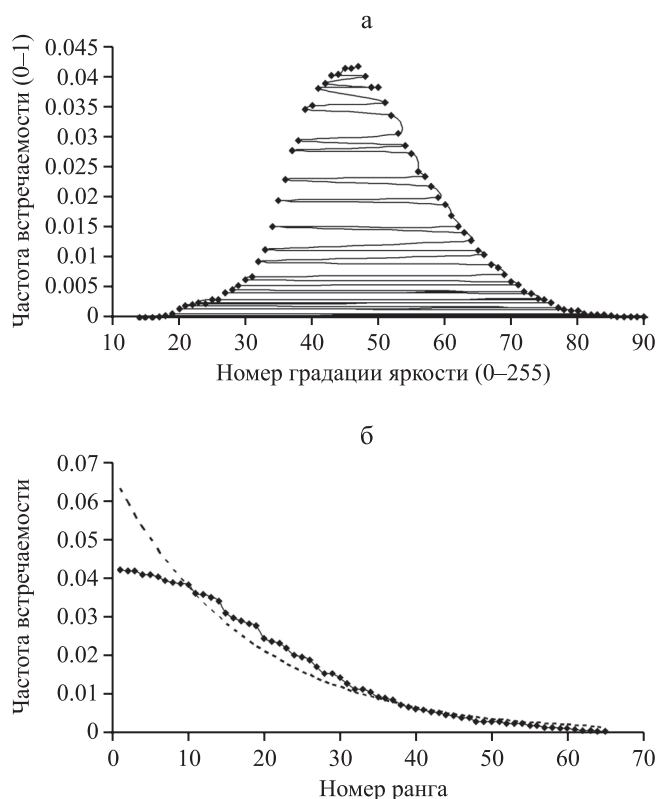


Рис. 2. Частотное (а) и ранговое (б) распределение градаций яркости пикселей геоизображений ареалов группы фаций 3 – подгольцовые кедрово-лиственничные редколесья. Ось x – номер ранга, ось y – частота встречаемости (0–1). Точки – данные о встречаемости пикселей, линии – порядок ранжирования по встречаемости. Пунктирная линия соответствует экспоненциальной аппроксимации $\rho = \exp(-0.057x - 2.72)$.

(ель, кедр). Максимальные значения характерны для фаций в группах 11, 18, 21 и 24 – мелколистственным и лиственничным лесам, осоково-разнотравным лугам и песчаным массивам.

Для оценки интенсивности перестройки ранговых распределений по позициям градаций яркости в последовательности номеров групп фаций (1–30) от градации яркости конкретного ранга $\xi(x)$ в каждой группе фаций отнимается соответствующее модальное значение яркости ξ_m , т.е. данные центрируются, и тем самым ликвидируется средообусловленное смещение значений (см. рис. 3), что позволяет проследить закономерности перестановки позиций $\xi(x)$. Наиболее устойчивые (неподвижные позиции) соответствуют первым 24 рангам с варьированием $\xi(x)$ на не более трех позиций и рангам 50–55 с вариацией около 7 позиций. Максимальное среднее расстояние перестановочной трансформации $\xi(x)$ – 8 позиций (ранг 32) с варьированием 8 ± 4 позиции. После самого

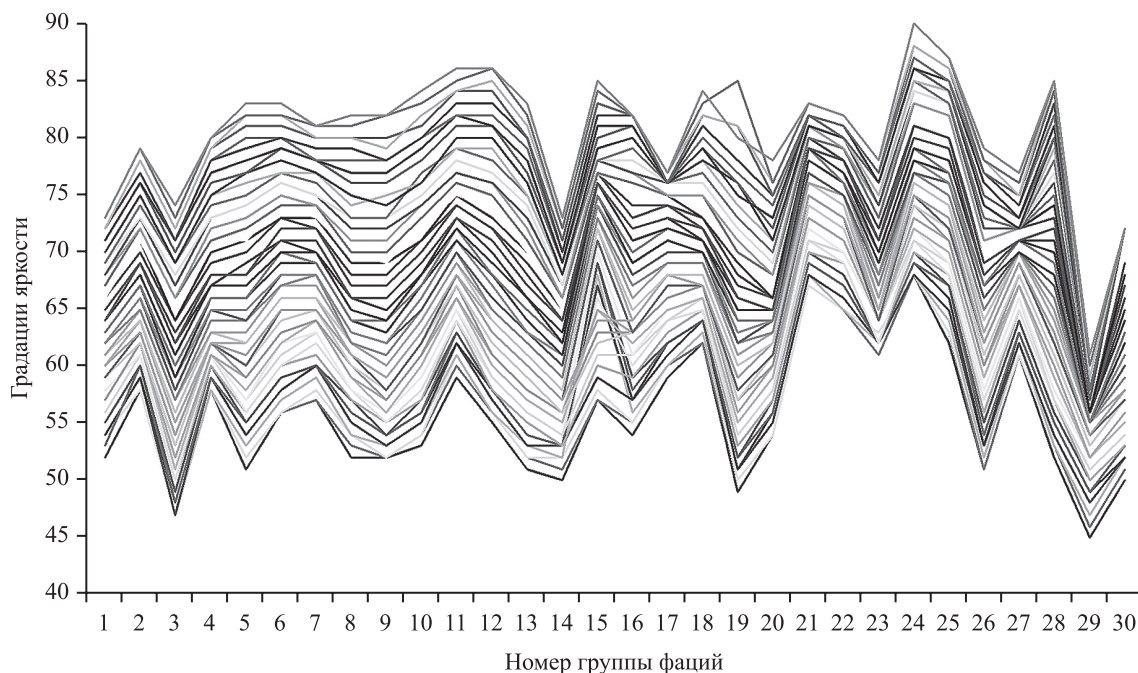


Рис. 3. Перестройка структуры участков геоизображения в последовательности групп фаций (см. рис. 1). Ось x — номер группы фаций, ось y — градация яркости. Каждая линия соответствует позиции x (1–255) ранговых распределений.

неустойчивого ранга 32 расстояние перестановки ξ линейно снижается. Наиболее сильные перестройки в зоне устойчивости (1–24 позиции) приурочены к границам геомов и переходных зон от естественных к антропогенно измененным участкам территории.

В качестве аппроксимаций ранговых распределений градаций яркости изображений принимаются экспоненциальные зависимости вида (9) с линейной метрикой r_1 . Значение $a_x = \frac{\partial r_1}{\partial x}$ определяет “вес” каждого фактора в интегральном показателе r_1 . Этот “вес” может быть отрицательным, поскольку зависит от скорости изменения факторов по основному параметру геокомплексов, например, высоте местоположения или времени. На основе (9) вычисляются градиенты $G(x)$, потоки $J(x) = -KG(x)$ и источники (стоки) по каждому направлению x :

$$\begin{aligned} G_x(r_1) &= \frac{\partial \rho}{\partial x} = -ka_x C_1 \exp(-kr_1), \\ J_x(r_1) &= -KG_x(r_1) = a_x C_1 \exp(-kr_1), \\ R_x(r_1) &= \frac{\partial J_x}{\partial x} = -K \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = -ka_x^2 C_1 \exp(-kr_1). \end{aligned} \quad (13)$$

В этой модели величина баланса источников и стоков $R_x(r_1)$ пропорциональна потоковым связям и градиентам: $R_x(r_1) = a_x G(r_1) = ka_x J(r_1)$.

В широком смысле $\rho(r_1)$ интерпретируется как функция значения (значимости), близкая по смыслу соответствующим терминам ландшафтного планирования. Тогда градиентная связь J определяет чувствительность к изменениям позиции x , а источники-стоки R — открытость участков ландшафтов к внешним воздействиям. Если $\rho(r_1)$ отражает состояние и структуру фаций, то расчетные величины (13) — потоковые связи в организации ландшафтной территории.

Для оценки интенсивности трансформации структуры ландшафтов рассчитываются показатели их структурно-динамической перестройки, когда при переходе от одного геокомплекса к другому $t \rightarrow t_1$ элементы меняют свою позицию $x \rightarrow x_1$ в соответствии с изменением значимости $\rho(t, x) \rightarrow \rho(t_1, x_1)$. Имеется возможность проследить, как изменяется по параметру t позиция $x(t)$ и соответствующее значение $\rho(t, x)$, а также рассчитать напряженность пространственно-временных потоковых связей

$$J(t, x) = -K[\rho(t_1, x_1) - \rho(t, x)]/(x_1 - x). \quad (14)$$

Расчеты показывают, что направление и интенсивность потоков связаны с различием модальных значений $\xi_m(t_1) - \xi_m(t)$ распределений для сравниваемых фаций. При положительном значении (смещение в область повышенной яркости фона геоизображения) потоки до номера ранга $x = 11$ отрицательные, а далее положительные. Посколь-

ку в интервале $1 < x < 20$ зависимость $J(t, x)$ от x почти линейна, можно говорить о наличии дополнительного внешнего источника изменений встречаемости, выраженного в повышении яркости фрагмента геоизображения.

Результаты исследований. Для выявления закономерностей пространственной трансформации строения геокомплексов по космическим снимкам для изображения ареалов групп фаций сначала определяются коэффициенты аппроксимирующих экспоненциальных функций для ранговых распределений уровней яркости $\xi(x)$ по позициям x в логарифмическом виде $\ln \rho = b - kr_1(b = \ln C_1)$. Величина C_2 в уравнении (9) для этих распределений мала и ею пренебрегаем. Полученные коэффициенты k и b для разных групп фаций, как правило, коррелированы [8], и в данном случае $b = 11.09k = 3.29$. $R = 0.97$. Это означает, что существует общая формула для набора распределений $\rho(x) = \exp(-3.29) \cdot \exp(-k(x - 11.09))$, показывающая, что примерно в позиции $x_0 = 11$ для разных групп фаций имеется одинаковое значение встречаемости $\rho = \rho(11.09) = \exp(-3.37) = 0.037$. Это также указывает на то, что выбранная ландшафтная территория по структуре ранговых распределений представляет собой комплекс (конгруэнцию), объединяющий участки разных групп фаций с инвариантным кодом $(-3.29; 11.09)$, характеризующим местную географическую среду и особенности космоснимков.

Для высокогорных и горнотаежных фаций прослеживается линейная зависимость обратных значений коэффициентов k от высоты H (м): $1/k = 0.0093H - 1.78$, $R = 0.88$. Для равнинных фаций такой связи нет, но существует зависимость от расстояния L (км) до основного русла р. Иркут: $1/k = 0.58L - 13.32$, $R = 0.73$. Для обобщения уравнений переходим к интегральному высотному показателю $t = H - 36L - 234$, коэффициенты которого подбираются таким образом, чтобы обеспечить пропорциональность $1/k = 0.0093t = t/k_0$. Коэффициент в формуле обобщенного показателя $t = H - 36L - 234$ определяет меру соответствия факторов ландшафтной дифференциации: 1 км расстояния на местности равен 36 м высоты.

Итоговое эмпирическое уравнение

$$\begin{aligned} \rho(t, x) &= \rho_I \exp(-k_0 x / t) = \\ &= 0.037 \exp(-107.5x / t), \\ (x - 11.09) &\rightarrow x \end{aligned} \quad (15)$$

похоже на выражение (3а), что подразумевает логарифмический масштаб переменных.

Действительно, это уравнение является решением уравнения Эйлера для однородных функций нулевого порядка:

$$0 = \frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} t + \frac{\partial \rho(t, x)}{\partial x} x = \frac{\partial \rho(t, x)}{\partial \ln t} + \frac{\partial \rho(t, x)}{\partial \ln x} \quad (16)$$

— последнее уравнение справедливо для стационарного потока в пространстве логарифмических переменных без источников и стоков. Этот факт доказывает, что масштаб независимых переменных ландшафтных исследований должен быть логарифмическим. Заменой переменных $\ln x \rightarrow x$ в уравнениях вида (16) приходим к базовому соотношению (1), и при этом выполняются все закономерности, описанные выше, но в логарифмических координатах.

Вычисляется относительный градиент по каждому фактору

$$\begin{aligned} a) D_t(t, x) &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} = k_0 x / t^2, \\ b) D_x(t, x) &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho(t, x)}{\partial x} = -k_0 x / t \end{aligned} \quad (17)$$

и норма замещения факторов $E(t, x) = D_t(t, x) / D_x(t, x) = x/t$. Она однозначно определяет кривые распределений $\rho(t, x) = \rho_I \exp(-k_0 E(t, x))$ и в этом смысле является инвариантной функцией каждого ландшафтного комплекса. Теоретический интерес представляет расчет по полученным формулам трансформации информационных потоков одновременно по характеристикам высоты и рангов на основе градиентов (17). Потоки по градиенту D_t имеют разную направленность в зависимости от положения на оси x относительно узловой позиции $x = x_0$ (рис. 4а). Этот результат совпадает с выводами, сделанными при обработке данных по уравнению (14). Причем при $x < x_0$ интенсивность потока всегда понижается с высотой, а при $x > x_0$ потоки сначала увеличиваются, а после достижения значения $t_k = k_0(x - x_0)$ начинают постепенно снижаться (рис. 4б). Потоки по градиенту номера ранга сначала возрастают, а затем медленно уменьшаются с высотой (рис. 4в). Это выражается в концентрации элементов вокруг первой позиции, уровень которой $\rho(t, x)$ падает с ростом t . Суммарные потоки по двум направлениям t и x согласно (15) в данном случае сбалансированы в каждой точке пространства (t, x) .

Обсуждение результатов и выводы. Проведенные исследования демонстрируют дополнительную результатов математического моделирования, теоретического анализа и статистической обработки эмпирических данных. Изучаются

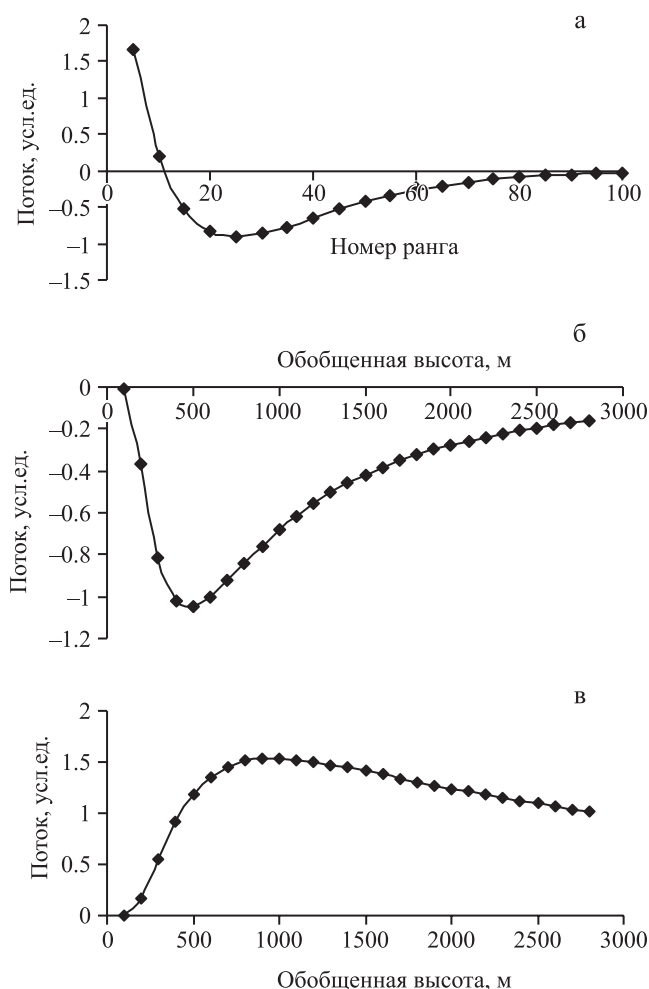


Рис. 4. Интенсивность потоков в зависимости от номера ранга и обобщенной высоты t : а — по градиенту высоты; б — по градиенту высоты при $x > x_0$; в — по градиенту позиции. Фиксированные величины $x = 20$, $t = 1500$ м. Точки и линии соответствуют расчетным значениям.

закономерности формирования и изменения ранговых распределений встречаемости пикселей различной яркости на участках растровых геоизображений, соответствующих ареалам проявления групп фаций. Подобного рода закономерности описываются математическими моделями в виде степенных и экспоненциальных функций. Недостаток точности известных аппроксимаций с их помощью эмпирических распределений заставляет искать теоретические основы трансформации формы ранговых распределений. Удачной системной интерпретацией являются дифференциальные уравнения вида (1) для описания изменения плотности распределений в пространстве линейно упорядоченных географических характеристик. Эти уравнения связаны с переходными

явлениями, потоковыми процессами по градиентам потенциалов в пространстве интегральных характеристик порядка и гравитационного типа взаимодействиями. Эмпирические результаты наглядно демонстрируют, что пространство формирования ранговых распределений имеет логарифмические координаты, что говорит в пользу степенных моделей их представления, когда экспоненциальные функции рассматриваются только как аппроксимации кривых распределений или как выражение фундаментальных закономерностей в пространстве логарифмированных значений признаков.

Геокомплексы различных типологических групп характеризуются ранговыми распределениями — зависимостью плотности встречаемости $\rho(t, x)$ градаций яркости (x) элементов геоизображений от ранговой позиции. Позиция (ранг) определяется совокупностью локальных географических характеристик, упорядоченных по значимости. Взаимодействие плотностей встречаемости разных рангов между собой и с окружением определяет организацию территориального комплекса и ее трансформацию в пространстве и во времени. По предлагаемым формулам удастся определить интенсивность межфациальных потоковых связей, которые имеет смысл интерпретировать как плотность потоков информации. Прослеживается зависимость коэффициентов функций плотности распределений от высоты местоположения фаций разных групп. С высотой в горно-таежном, подгольцовом и гольцовом поясах обменные процессы затухают с одновременным ростом неоднородности структуры высотного комплекса. Получившиеся эмпирические закономерности иллюстрируют простой процесс информационного обмена с нулевым балансом источников и стоков по разным характеристикам. Учет нарушения этого баланса позволяет использовать уравнение (1) в полном объеме и отражать процессы глубокой трансформации (эволюции) геокомплексов в пространстве разных географических характеристик порядка.

Эмпирическое соотношение (15) преобразуется к функции двойной экспоненты в логарифмическом пространстве $\ln x \rightarrow x$:

$$\begin{aligned} \rho(t, x) &= \rho_I \exp(-k_0 x / t) = \\ &= \rho_I \exp(-k_0 \exp(\ln x - \ln t)) \rightarrow \\ &\rightarrow \rho_I \exp(-k_0 \exp(x - t)). \end{aligned} \quad (18)$$

Такие функции хорошо известны в науке и используются для описания процессов роста и развития, например, уравнение Гомпертца;

они приводят к автомодельному соотношению [12] вида

$$\ln \rho(t + \tau, x) = \alpha + \beta \ln \rho(t, x), \quad (19)$$

связывающему характеристики состояния систем в разные моменты времени, или в разных местоположениях. Следовательно, ранговые структуры геокомплексов также обладают аналогичным свойством подобия при перемещении их в пространстве (смене ареалов фаций). Разница $x - t$ в последнем уравнении из (18) имеет смысл смещения ранговой позиции x средовым фактором t в разных фациальных условиях t , поэтому фактор географического пространственно-временного положения t может быть идентификатором и классификатором фаций.

В экономической науке уравнение вида (19) выражает закон Гибрата, где $\rho(t, x)$ характеризует организацию (фирму) в текущем t и последующих $t + \tau$ периодах. Это уравнение приближенно описывает рост сформировавшихся организаций, но не учитывает убывание темпов роста с увеличением размера организации [13]. Уравнение (17а), напротив, удовлетворяет этому свойству, поэтому простая зависимость (19) должна быть дополнена новыми параметрами и связями. Например, для объяснения действия законов Ципфа и Гибрата А. Сайчев с соавторами [27] предлагают учитывать баланс процессов рождения и ликвидации фирм в моделях стохастической динамики. Однако в использованных ими уравнениях отсутствует вторая производная по основному параметру, что не позволяет, в частности, отобразить все особенности переходных процессов трансформации участков ландшафтов в пространстве и времени и не обеспечивает необходимую симметрию независимых переменных. Свойства симметрии важны для задания метрики пространства этих переменных, т.е. расчета интегрального показателя с учетом скоростей изменения характеристик разного содержания.

На основе свойств эмпирических формул (18) можно считать, что пространство представления географических характеристик является логарифмическим, и метрики пространства ассиметричны относительно переменных рангового x и географического t положения при симметричности исходных уравнений (1), которым формула (18) удовлетворяет при нулевом балансе источников и стоков. Имеет смысл рассмотреть общий вариант решения уравнения (1) с появлением эффектов саморазвития (8) для понимания закономерностей перестройки структуры и организации ландшафтов, рассчитать на основе выведенных формул информационные потоковые связи между

различными фациями, формирующие единство ландшафта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Валландер С.В. Лекции по гидроаэромеханике. Л.: Из-во ЛГУ, 1978. 296 с.
2. География и мониторинг биоразнообразия. М.: Издательство научного и учебно-методического центра, 2002. 432 с.
3. Гомология и гомотопия географических систем // Научн. ред. А.К. Черкашин, Е.А. Истомина. Н.: Гео, 2009. 351 с.
4. Гумбольдт А. Космос. Опыт физического мирописания / Пер. с нем. Н. Фролова. Изд. 2-е. Ч. 1. М.: Тип. А. Семена. 1862. 410 с.
5. Гуров К.П. Феноменологическая термодинамика необратимых процессов. М.: Наука, 1978. 128 с.
6. Изард У. Методы регионального анализа: введение в науку о регионах. М.: Прогресс, 1966. 660 с.
7. Истомина Е.А. Геоинформационное картографирование ландшафтов Тункинской котловины на основе метода факторально-динамической классификации // Геодезия и картография. 2012. № 4. С. 32–39.
8. Истомина Е.А., Черкашин А.К. Математические модели географического комплекса и их применение для анализа космической информации // Изв. РАН. Сер. геогр. 2005. № 2. С. 103–113.
9. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1971. 576 с.
10. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. СПб.: Лань, 2005. 432 с.
11. Марр Д. Зрение. Информационный подход к изучению представления и обработки зрительных образов. М.: Радио и связь, 1987. 400 с.
12. Мина М.В., Клевезаль Г.А. Рост животных. М.: Наука, 1976. 291 с.
13. Пирогов Н.К., Поповидченко М.Г. Закон Гибрата в исследованиях роста фирмы // Корпоративные финансы. 2010. № 1. С. 106–119.
14. Проскуряков М.А. Хронобиологический анализ растений при изменении климата. Алматы: LEM, 2012. 228 с.
15. Пузаченко Ю.Г., Онуфреня И.А., Алещенко Г.М. Анализ иерархической организации рельефа // Изв. РАН. Сер. геогр. 2002. № 4. С. 29–38.
16. Ратьковский И.С., Ходяков М.В. История Советской России. СПб.: Лань, 2001. 416 с.
17. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.
18. Черкашин А.К., Истомина Е.А. Выделение границ функционально-однородных ареалов на космических снимках на основе вычисления определителя

- Якоби // География и природные ресурсы. 2013. № 1. С. 157–165.
19. Черкашин А.К. Полисистемное моделирование. Новосибирск: Наука, 2005. 280 с.
20. Черкашин А.К. Полисистемный анализ и синтез. Приложение в географии. Новосибирск: Наука, 1997. 502 с.
21. Шунер В.А. Самоорганизация городского расселения. М.: Российский откр. ун-т, 1995. 166 с.
22. Discontinuities in Ecosystems and Other Complex Systems / Allen C.R., Holling C.S. (Ed.). N.Y.: Columbia Univ. Press, 2008. 272 p.
23. Cherkashin A.K. Polysystem modelling of geographical processes and phenomena in nature and society // Mathematical modelling of natural phenomena. 2009. V. 4. № 5. P. 4–20.
24. Krugman P. Confronting the Mystery of Urban Hierarchy // J. of the Japanese and international economies. 1996. № 10. P. 399–418.
25. Li W. Zipf's Law Everywhere // Glottometrics. 2002. № 5. P. 14–21.
26. Motomura I. Further notes on the law of geometrical progression of the population density in animal association // Seiri Seitai. Tokio. 1947. V. 1. P. 55–60.
27. Saichev A.I., Malevergne Y., and Sornette D. Theory of Zipf's Law and beyond // Series: Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. V. 632. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 2010. 171 с.
28. Sukhanov V.V. Test for Standard Form of the Species Structure in Taxocenes of Marine Organisms // Russian J. of Marine Biology. 2002. V. 28. № 4. P. 278–281.